

Inverse de matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

1. Posons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Vérifier que $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)\mathbf{1}_2$.

2. En déduire que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad ad - bc \neq 0.$$

Exercice 2. Calculer l'inverse des matrices suivantes:

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$