Leçon 1: les entiers

L'ensemble N des entiers naturels

Compter, dresser des listes, classer et comparer des objets interviennent dans de multiples activités humaines. Les nombres entiers naturels sont à la base de ces activités, en particulier, ils constituent l'un des fondements des mathématiques.

Les mathématiciens admettent l'existence d'un ensemble noté N dont les éléments sont les entiers naturels. Cette liste infinie

$$0, 1, 2, 3, ...$$

est écrite dans l'ordre croissant usuel. Pour deux nombres naturels distincts m, n l'écriture

$$m < n$$

signifie: l'entier m figure avant l'entier n dans la liste. L'écriture

$$m \leq n$$

signifie: $m = n$ ou $m < n$. Avant de poursuivre, un peu de

Vocabulaire et notations 1:

- Un *ensemble* sera dans ce cours une *collection d'objets* appelés *éléments* de cet ensemble.

- *signe d' appartenance*: $x \in E$ se lit *x est élément de E*, ou encore *x appartient à E*. Sa négation $x \notin E$ se lit *x n'est pas élément de E*.

L'ensemble sans éléments est noté $\emptyset$ ou encore $\{\ \}$ et est appelé l' *ensemble vide*.
Un ensemble ayant un unique élément est appelé un *singleton*. Par exemple, $\{1\}$ est le singleton d'élément $1 \in$ N. Pour un entier naturel $n \geq 1$, l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ dont les éléments sont les entiers de 1 à n est noté $[1, n]$. Plus généralement pour deux entiers $m < n \in$ N, l'ensemble $\{m, m+1, \ldots, n\}$ est noté $[m, n]$.

Un ensemble naturel dans tout langage est le dictionnaire en un alphabet fini: par exemple, prenons les deux lettres a et b, un entier naturel $n \in$ N et notons D_n l'ensemble des mots de longueur n en l'alphabet $A = \{a, b\}$. On a

$$D_1 = \{a, b\}, \quad D_2 = \{aa, ab, ba, bb\}, \quad D_3 = \{aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}, ...$$

- *signe d' inclusion:* $P \subset E$ se lit *P est une partie de E*, ou encore *P est inclus dans E* ce qui signifie que tout élément de P est élément de E. Sa négation est notée $P \not\subset E$ ce qui signifie qu'au moins l'un des éléments de P n'est pas élément de E.

- *signe d'égalité*: soient A, B deux ensembles. $A = B$ signifie $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarque: le signe $=$ utilisé pour l'*égalité* provient de - *quoi de plus égaux que deux traits de même longueur* -.

- *Assertion:* Une assertion A est un énoncé mathématique qui peut être *vrai* ou *faux*, pas les deux à la fois.

Par exemple: $0 \in$ N est une assertion vraie et $0 \notin$ N est une assertion fausse.

La négation d'une assertion A est notée $non(A)$. Elle est vraie lorsque A est fausse et elle est fausse lorsque A est vraie.
Soient A et B deux assertions.
- L'assertion

$$A \ ou \ B$$

appelée *disjonction* est vraie si l'une au moins des assertions A, B est vraie, elle est fausse sinon.
Par exemple l'assertion

$$2 \in \mathrm{N} \ ou \ \frac{1}{2} \in \mathrm{N}$$

est vraie.
- L'assertion

$$A \ et \ B$$

appelée *conjonction* est vraie si les deux assertions A, B sont vraies, fausse sinon.
Par exemple l'assertion

$$2 \in \mathrm{N} \ et \ \frac{1}{2} \in \mathrm{N}$$

est fausse.
- L'assertion

$$non(A) \ ou \ B$$

s'appelle l' *implication*. On écrit

$$A \Rightarrow B$$

ce qui se lit A implique B. Elle est vraie lorsque A est fausse et lorsque A et B sont simultanément vraies. Elle est fausse lorsque A est vraie et B est fausse.
Par exemple, l'assertion

$$2 \in \mathrm{N} \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathrm{N}$$

est fausse. Par contre, l'assertion

$$\frac{1}{2} \in \mathrm{N} \Rightarrow 2 \in \mathrm{N}$$

est vraie. Bien sûr la vérité de cette dernière implication ne nous apprend rien.
En pratique, lorsqu'on demande de montrer $A \Rightarrow B$ on entend: supposer que A est vraie et en déduire que B est vraie.

Voici les propriétés fondamentales de l'ensemble N des entiers naturels.

Propriétés de $\leq$ sur N

Quels que soient les entiers naturels $m, n, p \in \mathrm{N}$, on a

(0) $m \leq n \ ou \ n \leq m$

(1) *Réflexivité*: $n \leq n$

(2) *Antisymétrie*: $m \leq n \ et \ n \leq m \Rightarrow m = n$
(c'est à dire: si $m \leq n \ et \ n \leq m$ alors $m = n$)

(3) *Transitivité*: $m \leq p \ et \ p \leq n \Rightarrow m \leq n$
(c'est à dire: si $m \leq p \ et \ p \leq n$ alors $m \leq n$)

On résume les propriétés (0), (1), (2), (3) en disant que N muni de $\leq$ est un ensemble *totalement ordonné*.

Définitions:

- Majoration: Une partie $P \subset \mathrm{N}$ est dite majorée, s'il existe $M \in \mathrm{N}$ tel que pour tout $p \in P$ on ait $p \leq M$.

- Minoration: Une partie $P \subset \mathrm{N}$ est dite minorée, s'il existe $m \in \mathrm{N}$ tel que pour tout $p \in P$ on ait $m \leq p$.

Exemple: la partie $[1, 111]$ est majorée par $111, 112, ...$ et minorée par 0 et 1.

- Maximum: On appelle plus grand élément de $P \subset \mathrm{N}$ tout élément $M \in P$ tel que pour tout $p \in P$ on ait $p \leq M$. Si M existe, il est unique et on le note $Max(P)$.

- minimum: On appelle plus petit élément de $P \subset \mathrm{N}$ tout élément $m \in P$ tel que pour tout $p \in P$ on ait $m \leq p$. Si m existe, il est unique et on le note $min(P)$.

Exemple: $min([1, 111]) = 1$ et $Max([1, 111]) = 111$.

Propriétés fondamentales de l'ensemble ordonné $(\mathrm{N}, \leq)$

(1) Toute partie non vide $P \subset \mathrm{N}$ admet un plus petit élément

(2) N n'est pas majoré.

(3) Toute partie non vide et majorée $P \subset \mathrm{N}$ admet un plus grand élément.

Ces propriétés figurent parmi les hypothèses de base de la construction des mathématiques. Nous les utiliserons librement par la suite.

Vocabulaire et notations 2 :

- On appelle *prédicat* toute assertion qui dépend explicitement d'une ou plusieurs indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Un prédicat est noté $P(x_1, \ldots, x_n)$. Par exemple

$$x_1 \in \mathrm{N} \ et \ x_2 \geq 1$$

est un prédicat.

- Soit E un ensemble, x une indéterminée et $P(x)$ un prédicat. L'écriture

$$\{x \in E, \ P(x)\}$$

désigne la partie de E formée des éléments x de E pour lesquels $P(x)$ est vraie.

Par exemple, pour - *n est un multiple de* 2- la partie

$$\{n \in \mathrm{N}, \ n \text{ est un multiple de } 2\}$$

est l'ensemble des entiers naturels pairs.

- Soit A, B, C trois parties de l'ensemble E.

Intersection: c'est la partie

$$A \bigcap B = \{x \in E, \ x \in A \ et \ x \in B\}$$

Réunion: c'est la partie

$$A \bigcup B = \{x \in E, \ x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Par exemple, $[1,5] \cap [4,7] = [4,5]$, $[1,5] \cup [4,7] = [1,7]$, $[1,3] \cap [4,5] = \emptyset$.
On a

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

C'est pourquoi on omet souvent les parenthèses dans les écritures lorsque celles-ci ne contiennent que des intersections ou que des réunions.

Le Principe de récurrence.

Souvent on cherche à démontrer la vérité d'une propriété $P(n)$ pour tout nombre naturel $n \in \mathrm{N}$ à partir d'un certain rang. Voici trois exemples:

Q1: montrer que pour tout naturel $n \in \mathrm{N}$, $n \neq 0$, on a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Q2: soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$, n droites du plan que l'on suppose sécantes 2 à 2 et sans points triples i.e. telles que pour tout $i, j, k \in [1, n]$, 2 à 2 distincts, on ait

$$D_i \cap D_j \cap D_k = \emptyset.$$

En combien de points ces droites se coupent-elles?

Q3: montrer que tout naturel $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$ admet un diviseur premier $p \in \mathrm{N}$.

Pour répondre à des questions de ce type, on fait souvent appel au raisonnement par récurrence.

Théorème:

Soit $n_0 \in \mathrm{N}$ et $P(n)$ une assertion dépendant explicitement de $n \in \mathrm{N}$.

Pour que $P(n)$ soit vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$

il faut et il suffit que

(1) $P(n_0)$ soit vraie (*initialisation*)

(2) quel que soit $n \in N, n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ soit vraie (*pas de récurrence*)

Démo: La condition est suffisante: on veut montrer que (1) et (2) implique $P(n)$ pour tout naturel $n \geq n_0$. On procède par l'absurde: supposons que $P(n)$ soit fausse pour au moins un entier naturel. La partie $P \subset \mathrm{N}$ des entiers naturels $n \geq n_0$ pour lesquels $P(n)$ est fausse est donc non vide. Notons $m = min(P)$ son plus petit élément. Puisque $P(n_0)$ est vraie on a $n_0 < m$. Par ailleurs $P(m-1)$ est vraie par définition de $min(P)$. Par (2), $P(m)$ est vraie, ce qui contredit $m \in P$.

La condition est nécessaire: si $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ alors (1) et (2) sont clairement vraies.

En mots:

Pour montrer par récurrence qu'une assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, vérifiez que $P(n_0)$ est vraie et ensuite montrez que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

Il s'agit d'un effet *dominos*: n_0 tombe, ensuite $n_0 + 1$ tombe, ensuite $n_0 + 2$, etc...

Revenons sur la question Q2 sur les points d'incidence de n droites du plan (*faites une figure*): pour une droite il y a 0 point, pour 2 droites il y a 1 point, pour 3 droites il y a 1+2 points, pour 4 droites il y a 1+2+3 points,...

On fait l'hypothèse de récurrence suivante: les n droites se coupent en $\frac{n(n-1)}{2}$ points.

Démo:

- initialisation: c'est vrai pour $n = 1$.
- pas de récurrence: supposons vrai pour n droites. La $n+1$ ième droite coupe chacune des n premières droites en 1 point. Dès lors, il y a

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

points d'incidence de $n+1$ droites. C'est exactement le nombre annoncé après remplacement de n par $n+1$.

Voici une variante du théorème de récurrence qui précède:

Récurrence forte:

pour que $Q(n)$ soit vraie pour tout $n \geq n_0$

il faut et il suffit que

(1) $Q(n_0)$ soit vraie

(2) quel que soit $n \geq n_0$, $(Q(k)$ pour tout $k \in [n_0, n]) \Rightarrow Q(n+1)$ soit vraie

Démo: il suffit d'appliquer la récurrence à l'assertion $P(n)$ donnée par $(Q(k)$ pour tout $k \in [n_0, n])$.

En mots:

Pour faire la preuve par récurrence forte, *vérifiez que $Q(n_0)$ est vraie, ensuite montrez que si $Q(n_0), Q(n_0+1), ..., Q(n)$ sont vraies alors $Q(n+1)$ est aussi vraie.*

<u>L'ensemble Z des entiers relatifs</u>

Par définition

$$\mathrm{Z} = -\mathrm{N} \bigcup \mathrm{N} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

On note $a+b$ la somme et ab le produit usuels des entiers relatifs $a, b \in \mathrm{Z}$.

Ordre sur Z:

pour deux entiers relatifs $a, b \in \mathrm{Z}$,

on dira que $a \leq b$ s'il existe un entier naturel $n \in \mathrm{N}$ tel que $b = a + n$.

Tout comme N, Z muni de $\leq$ est un ensemble totalement ordonné.

<u>L'ensemble Q des nombres rationnels</u>

Par définition,

$$\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}, \ a \in \mathrm{Z} \ et \ b \in \mathrm{N} \setminus \{0\}\}$$

Ordre sur Q:

pour deux rationnels $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in \mathrm{Q}$,

on écrira

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \quad \text{si l'on a} \quad ab' \leq ba' \text{ dans Z.}$$

Ici encore, l'ensemble Q muni de $\leq$ est totalement ordonné.