Devoir maison 5

Exercice 1 :

Soient $\mathcal{R}$ une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$(a,b)\mathcal{R}(a^{'},b^{'}) \Leftrightarrow ab^{'} = a'b$$

1°) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2°) soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, décrire la classe d'équivalence de (p,q).

Correction
1°) $ab = ab$ donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$, $\mathcal{R}$ est réflexive.
$(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Rightarrow ab' = a'b \Rightarrow a'b = ab' \Rightarrow (a',b')\mathcal{R}(a,b)$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')$ alors $\begin{cases} ab' = a'b \\ a'b'' = a''b' \end{cases}$ alors $\begin{cases} a' = \frac{ab'}{b} \\ a'b'' = a''b' \end{cases}$ car $b \neq 0$
Donc $\frac{ab'}{b}b'' = a''b'$, on multiplie par b et on simplifie par $b' \neq 0$, on a alors $ab'' = a''b$, c'est-à-dire $(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$, donc $\mathcal{R}$ est transitive.
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2°) Si $(a,b) \in \overset{\cdot}{\overbrace{(p,q)}} \Leftrightarrow aq = pb$, donc q divise bq et $q \wedge p = 1$ d'après le théorème de Gauss q divise b, il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $b = dq$, cela que l'on remplace dans $aq = pb$, ce qui donne $aq = pdq$, $q \neq 0$ donc $a = dp$, l'ensemble des couples de $\overset{\cdot}{\overbrace{(p,q)}}$ sont les couples de la forme (dp,dq).

Exercice 2 :
Soit E un ensemble.
On pose $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (A,B) de parties de E :
$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\Delta B$ est un ensemble fini ayant un nombre fini pair d'élément.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

Correction
$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ a zéro élément. Donc on a $A\mathcal{R}$A. $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $A\mathcal{R}B$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.
Alors $B\Delta A = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$ alors $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments et $B\Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.
Comme $A \cap B \subset A \cup B$, $Card\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) = Card(A \cup B) - Card(A \cap B)$

$$Card(A\Delta B) = Card(A \cup B) - Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B) = 2n$$
$$Card(B\Delta C) = Card(B \cup C) - Card(B \cap C) = Card(B) + Card(C) - 2Card(B \cap C) = 2m$$

Donc $Card(A) = -Card(B) + 2Card(A \cap B) + 2n$ et $Card(C) = -Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m$
Donc

$$\begin{aligned} Card(A\Delta C) &= Card(A \cup C) - Card(A \cap C) = Card(A) + Card(C) - 2Card(A \cap C) \\ &= -Card(B) + 2Card(A \cap B) + 2n - Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m \\ &= 2Card(A \cap B) + 2n - 2Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m \end{aligned}$$

C'est un nombre fini et pair donc $A\mathcal{R}C$, $\mathcal{R}$ est transitive.
Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1°) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2°) Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3°) Déterminer l'ensemble quotient.

Correction
1°) $x^2 - x^2 = x - x$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $x\mathcal{R}y$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ alors $y^2 - x^2 = y - x$ alors $y\mathcal{R}x$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, en additionnant ces deux égalités on trouve $x^2 - z^2 = x - z$. $\mathcal{R}$ est transitive.
Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2°) soit $x \in \dot{a}$ si $x\mathcal{R}a$ c'est-à-dire si $x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow x^2 - x + a - a^2 = 0$ autrement dit si x est solution de l'équation du second degré $X^2 - X + a - a^2 = 0$, évidemment a est solution, le produit des solutions est $a - a^2 = a(1 - a)$ donc l'autre solution est $1 - a$. Donc $\dot{a} = \{a, 1 - a\}$ sauf si $a = \frac{1}{2}$ alors $\dot{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3°) L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \left\{\{a, 1 - a\}, a \geq \frac{1}{2}\right\}$$

On est obligé de considérer $a \geq \frac{1}{2}$ (ou $a \leq \frac{1}{2}$) car pour $a \geq \frac{1}{2}$, $1 - a \leq \frac{1}{2}$ donc si on considère $a \in \mathbb{R}$, on écrirait deux fois chaque classe.

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{E}$ la relation définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$x\mathcal{E}y \Leftrightarrow \frac{x}{1 + x^2} \geq \frac{y}{1 + y^2}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre total.

Correction
Première méthode
$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $x\mathcal{E}x$, $\mathcal{E}$ est réflexive.
Si $x\mathcal{E}y$ et $y\mathcal{E}x$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x(1 + y^2) = y(1 + x^2) \Leftrightarrow x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \Leftrightarrow x - y + xy(y - x) = 0 \Leftrightarrow x - y - xy(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $x > 1$ et $y > 1$ entraine $1 - xy < 0$ en particulier $1 - xy \neq 0$. Donc $\mathcal{E}$ est antisymétrique.
Si $x\mathcal{E}y$ et $x\mathcal{E}z$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$, d'où $x\mathcal{E}z$. $\mathcal{E}$ est transitive.
Finalement $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre.
Soit $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et alors $x\mathcal{R}y$, soit $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ et alors $y\mathcal{R}x$, il s'agit d'une relation d'ordre total.
Deuxième méthode
Soit $f:]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} < 0$ donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$
Donc $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \leq y$, $\leq$ est une relation d'ordre total donc $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre total.