

Devoir maison 5
Math I algèbre

Exercice 1 :

Soient \mathcal{R} une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$a, b \mathcal{R} a', b' \Leftrightarrow ab' = a'b$$

1°) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2°) soit $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, décrire la classe d'équivalence de (p, q) .

Exercice 2 :

Soit E un ensemble.

On pose $A\Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$

On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , la relation \mathcal{R} , en posant, pour tout couple (A, B) de parties de E :

$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\Delta B$ est un ensemble fini ayant un nombre fini pair d'élément.

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 3 :

Soit \mathcal{R} , la relation définie sur \mathbb{R} par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1°) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x .

3°) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4 :

Soit \mathcal{E} la relation définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$x\mathcal{E}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$

Montrer que \mathcal{E} est une relation d'ordre total.