Feuille d'exercices n° 7

Calcul différentiel

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Pour les fonctions suivantes, déterminer les points a en lesquels la fonction est différentiable et déterminer sa différentielle en un tel point :

1. $f_1 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$,
2. $f_2 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_2(z) = \dfrac{1}{z}$,
3. $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_3(z) = \mathrm{Re}(z)$.

(avec $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

Exercice 3. Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels de dimensions finies. On considère une application $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ bilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (resp. $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$) une base de E (resp. F). On sait que l'on peut munir respectivement E et F des normes $\| \, \|_E$ et $\| \, \|_F$ définies par

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \in F, \quad \|x\|_E = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i| \text{ et } \|y\|_F = \max_{j \in [\![1;p]\!]} |y_j| \,.$$

1. Munissons $E \times F$ de la norme produit associée aux deux normes précédentes, notée $\| \, \|$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|\varphi(x, y)\|_G \leq C \|(x, y)\|^2.$$
2. Montrer que φ est différentiable en tout point $(x, y) \in E \times F$ et que
$$\mathrm{d}\varphi(x,y) : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & \varphi(x,k) + \varphi(h,y). \end{array}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en $(0, 0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.
2. L'application est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 6. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une fonction différentiable. Dans les cas suivants trouver le nombre de lignes et de colonnes de la matrice jacobienne de f en un point, puis à l'aide des entrées de la matrice jacobienne décrire la différentielle de f en un point donné :

1. f est une fonction réelle d'une variable réelle ($E = F = \mathbb{R}$),
2. f est une fonction vectorielle d'une variable réelle ($E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{R}^p$),
3. f est une fonction numerique (réelle) d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$), Quel est le lien avec le gradient de f dans ce cas là ?
4. f est une fonction vectorielle d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n,\ F = \mathbb{R}^p$.)

Exercice 7. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 8. Notons $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où $E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles premières dans la base $\mathcal{B}_c$ et les calculer.
2. Justifier que det est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où les dérivées partielles premières de f sont continues.
4. Justifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et écrire la différentielle de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10.

1. Si $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminer la dérivée de $u : x \longmapsto f(x,-x)$ et la différentielle en tout point de $g : (x,y) \longmapsto f(y,x)$.
2. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces normés, U un ouvert de E, et $f : E \to F$ différentiable. Pour $a \in U$ et $v \in E$ dériver la fonction composée $t \mapsto f(a+tv)$ en $t = 0$.

Exercice 11. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Montrer que l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x+g(x,y)) \end{array}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \int_0^{e^{xy}} \sin\left(t^2\right) dt.$$

En considérant f comme la composée de deux applications, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis écrire sa matrice jacobienne en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies , $f : E \longrightarrow F$ et $\lambda : E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables. En la considérant comme la composée de deux applications, montrer que l'application produit λf est aussi différentiable et déterminer sa différentielle en tout point de E.

Exercice 14. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs non nulles. Montrer que l'application inverse $\dfrac{1}{f}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle en tout point de u.