Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de Printemps 2013-2014
Math IV - PMI

Feuille d'exercices n° 6
SÉRIES DE FOURIER

Exercice I : Série de Fourier - étude d'un cas

On considère la fonction f de période 2π, définie par $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice II : Série de Fourier - étude d'un cas
Soit $\alpha \in]0,1[$ et f la fonction de période 2π, définie par $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. Montrer que $\displaystyle\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice III : Série de Fourier - fonction 2-périodique
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1]$. Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des cœfficients réels.

Exercice IV : Série de Fourier - Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice V : Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

Exercice VI : Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

Exercice VII : Série de Fourier - étude d'un cas

1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$. En déduire les valeurs des séries $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$.
2. Déterminer la série de Fourier de la fonction g impaire, 2π-périodique, définie par $g(x) = x$ sur $[0; \pi[$. Étudier sa convergence. Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice VIII : Série de Fourier - étude d'un cas

Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Etudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (voir exercice 1).

Exercice IX : Examen Janvier 2011

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Faire un graphe représentant la fonction f sur l'intervalle $]-4\pi, 4\pi]$.
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier la réponse.
3. a. Déterminer la série de Fourier de f en formulation réelle.
   b. En déduire la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}.$$
   a. Montrer que la série de fonctions de terme général
$$g_n(x) = \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}.$$
   est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.
5. a. Déduire de question 3. que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ nous avons
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$
   b. En se servant d'une formule trigonométrique connue, exprimer $\cos^2(nx)$ en fonction de $\cos(2nx)$. En déduire une expression de $g(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

c. Trouver alors une expression simple de $g(x)$ pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ en fonction de x^2 et π^2, puis pour tout x dans $[0, \pi]$ en fonction de $(x-\pi)^2$ et π^2.

Exercice X : Examen Janvier 2010

Soit la fonction f **paire**, 2π**-périodique** définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Faire un rapide dessin de la fonction.
2. Est-ce que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
4. En déduire la valeur des sommes suivantes
$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$
Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.
5. En remarquant que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$
trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice XI : Examen Janvier 2009

On considère la fonction 2π**-périodique** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|(\pi - |x|)$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Dessiner la fonction sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. La fonction f est elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle.
4. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe.
5. En déduire la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice XII : Examen Décembre 2007

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π**-périodique** définie par $f(x) = |\sin(x)|$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle .
N.B. : On rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
4. À l'aide de la formule de Parseval, évaluer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Exercice XIII

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0;\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des deux sommes suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice XIV

Déterminer la série de Fourier de la fonction $\sin$.