Problème du 09 mars 2016 : Correction.

Partie I.
On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \ .$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

1. *Expliciter T_2 et T_3.*
   On a $T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$. De même, $T_3(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$.
2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.*
   On a fait cette question en TD. On raisonne par récurrence forte, sur l'hypothèse $H(n)$ selon laquelle le degré de T_n est n et son coefficient dominant est 2^{n-1} si $n \geq 1$, et 1 si $n = 0$. Cette propriété est vraie aux rangs 0 et 1. Supposons-la vérifiée pour tout $k \leq n$, pour $n \geq 1$, et vérifions-la au rang $n + 1$. Le degré de XT_n est $n + 1$, et le degré de T_{n-1} est $n - 1$, donc le degré de $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est $n + 1$; et le coefficient dominant de T_{n+1} est le double du coefficient dominant de T_n, c'est-à-dire 2^n. On conclut que notre propriété est bien vérifiée pour tout n.
3. *Étudier la parité de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$*
   On raisonne de nouveau par récurrence forte ; on cherche à établir que T_n est pair si n est pair, et impair si n est impair. La propriété est vérifiée pour $n = 0, 1$; supposons la vérifiée pour tout $k \leq n$, pour un entier $n \geq 1$. Si n est pair, alors par hypothèse de récurrence T_n est pair et T_{n-1} aussi, donc $2XT_n$ et T_{n-1} sont tous deux impairs, par suite T_{n+1} est impair ; de même si n est impair on voit que T_{n+1} est pair. Ceci montre que notre propriété est encore vérifiée au rang $n+1$, et on conclut par récurrence forte.
4. *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.*
   On raisonne encore par récurrence forte ; la propriété demandée est vraie aux rangs $0, 1$. Si elle est vraie pour tout $k \leq n$, pour un entier $n \geq 1$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(t)) &= 2\cos(t)T_n(\cos(t)) - T_{n-1}(\cos(t)) \\ &= 2\cos(t)\cos(nt) - \cos((n-1)t) \\ &= 2\cos(t)\cos(nt) - \cos(nt)\cos(t) - \sin(nt)\sin(t) \\ &= \cos(t)\cos(nt) - \sin(nt)\sin(t) \\ &= \cos((n+1)t) \ . \end{aligned}$$

   La propriété est encore vraie au rang $n + 1$, et est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.*
   En utilisant cette expression de T_n, donner une expression de $T_n'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
   Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a par définition $x = \cos(\arccos(x))$; le résultat de la question précédente appliqué à $t = \arccos(x)$ nous donne $T_n(x) = T_n(\cos(t)) = \cos(nt) = \cos(n \arccos(x))$. On sait que arccos, en tant que fonction réciproque de cos, est dérivable en tout x tel que $\cos'(\arccos(x)) \neq 0$, donc pour tout $x \in]-1, 1[$, et que $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En dérivant les deux termes de l'égalité qu'on vient d'obtenir, on obtient

$$\forall x \in]-1, 1[\quad T_n'(x) = -n(\arccos(x))' \sin(n \arccos(x)) = \frac{n \sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

6. *Montrer que l'on a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. En déduire que* $\arccos(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{1 - x^2}$.
   Soit $x \in [-1, 1]$, et $t = \arccos(x)$. On a $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - x^2$; de plus, par définition de arccos on sait que $t \in [0, \pi]$, par conséquent $\sin(t) \geq 0$, et on déduit que $\sin(t) = \sqrt{1 - x^2}$. Quand x tend vers 1^-, $\arccos(x)$ tend vers $\arccos(1) = 0$ puisque arccos est continue ; puisque $\sin(u) \sim_0 u$, on a donc $\sin(\arccos(x)) \sim_{1^-} \arccos(x)$. Comme $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, on obtient bien comme demandé $\arccos(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{1 - x^2}$.

7. *Calculer $T_n'(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme T_n est un polynôme, on sait que la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en particulier $T_n'(1) = \lim_{x\to 1^-} T_n'(x)$. L'expression de T_n' obtenue précédemment nous donne

$$T_n'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{n\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Quand x tend vers 1^- $n\arccos(x)$ tend vers 0, donc $\sin(n\arccos(x)) \sim_{1^-} n\arccos(x)$, et on obtient alors

$$T_n'(x) \sim_{1^-} \frac{n^2\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sim_{1^-} n^2 \ .$$

On vient de démontrer que $T_n'(1) = n^2$.

8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.*
Pour $n = 0$ il n'y a pas de racine ; traitons le cas $n > 0$. De la relation $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$, on déduit que $T_n(\cos(t)) = 0$ si, et seulement si, $\cos(nt) = 0$; et comme cos est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$, $x \in [-1, 1]$ sera racine si et seulement si $x = \cos(t)$ avec $\cos(nt) = 0$. L'équation $\cos(a) = 0$ a pour solution tous les a qui sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Ceci montre que les racines de T_n dans $[-1, 1]$ sont tous les nombres $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$. Cela semble nous donner $2n$ racines pour un polynôme de degré n, ce qui est un peu inquiétant ; mais on voit que $x_{2n-1-k} = x_k$, et notre ensemble de racines se réduit à l'ensemble des x_k, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Reste à vérifier si on peut avoir $x_k = x_j$ pour $k \neq j \in \{0, \ldots, n-1\}$; tous ces nombres sont les valeurs prises par la fonction cos en des nombres distincts de $]0, \pi[$, et la fonction cos est injective sur cet intervalle, ce qui conclut.

9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner toutes les racines de T_n et étudier leur multiplicité.*
Ci-dessus, on a trouvé n racines distinctes de T_n ; comme T_n est de degré n, ces racines sont toutes de multiplicité 1, et il n'y en a pas d'autre. Les racines de T_n sont donc exactement les réels de la forme $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Partie II.

L'objectif de cette partie est de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. *Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ pour $n \geq 2$, puis la majoration suivante : pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.*
C'est encore une question qui a été faite en TD : on a $\frac{1}{X(X-1)} = \frac{X-(X-1)}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$.
On en déduit que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \ .$$

Pour tout $k \geq 2$ on a $k^2 \geq k(k-1)$, donc pour tout $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leq 1 - \frac{1}{n} \ .$$

Ceci nous donne bien, pour $n \geq 2$, que

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \ .$$

Cette inégalité est également vraie pour $n = 1$ puisque $S_1 = 1 = 2 - 1$, ce qui conclut.

2. *Prouver que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note l sa limite.*

   La suite (S_n) est croissante puisque pour tout $n \geq 1$ on a $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. On vient de montrer que cette suite est également majorée (par 2), elle est donc convergente.

3. On introduit pour tout $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

   (a) *Trouver une relation exprimant S_{2n} en fonction de S_n et U_n.*
   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + U_n \\
&= \frac{1}{4} S_n + U_n \ .
\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que U_n converge et exprimer sa limite l' en fonction de l.*
   Les suites (S_n) et (S_{2n}) convergent toutes les deux vers l, donc (U_n) est convergente, en tant que différence de deux suites convergentes, et sa limite est $\dfrac{3l}{4}$.

   Nous allons maintenant poursuivre l'étude en calculant l' à l'aide des polynômes de Tchebychev.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

   (a) *Etablir l'égalité $\dfrac{T_n'}{T_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X - x_k)}$.*
   Soit $n \geq 1$. On a vu précédemment que les x_k sont les racines de T_n, et que ce sont des racines simples. En particulier, aucun x_k n'est racine de T_n', et on sait donc que la décomposition de $\dfrac{T_n'}{T_n}$ en éléments simples est de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - x_k}$. On obtient en multipliant par $x - x_k$ et en faisant tendre x vers x_k que

$$a_k = \lim_{x \to x_k} (x - x_k)\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \lim_{x \to x_k} \frac{x - x_k}{T_n(x) - T_n(x_k)} T_n'(x) = \frac{T_n'(x_k)}{T_n'(x_k)} = 1 \ .$$

   Ceci donne bien l'expression demandée dans l'énoncé. On aurait aussi pu procéder comme suit : comme on connaît le coefficient dominant de T_n, et ses racines, on a la factorisation

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \ .$$

   On en déduit en appliquant la formule de dérivation d'un produit de polynômes que

$$T_n'(X) = 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (X - x_i) \ .$$

   En divisant par T_n, on arrive bien à

$$\frac{T_n'(X)}{T_n(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k} \ .$$

(b) *En déduire que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = n^2 \ .$$

Soit $n \geq 1$. En évaluant l'égalité précédente en $x = 1$, on arrive à

$$\frac{T_n'(1)}{T_n(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k} \ .$$

Comme $T_n'(1) = n^2$ et $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = 1$, on obtient bien

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} \ .$$

(c) *A l'aide du résultat de la question précédente, calculer*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \ .$$

Commençons par remarquer que

$$1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 1-\cos\left(2\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) \ .$$

Par conséquent, le résultat de la question précédente nous amène à

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \ , \text{ autrement dit } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 \ .$$

En utilisant la relation $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \ ,$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 - n \ .$$

5. *Prouver que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.*
Première méthode : étude de fonctions. Considérons les fonctions f, g définies sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = x - \sin(x)$ et $g(x) = \tan(x) - x$. Elles sont toutes deux dérivables, et $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$, $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, f et g sont toutes les deux croissantes, et puisque $f(0) = g(0) = 0$, on voit que f et g sont toutes deux positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui établit les inégalités qu'on souhaitait démontrer.
Deuxième méthode : accroissements finis. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Les fonctions sin et tan sont dérivables sur $[0, x]$ donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ et $d \in]0, x[$ tels que

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(c)x = (\cos c)x, \text{ et } \tan x = \tan 0 + \tan'(d)x = (1 + \tan^2(d))x.$$

On en déduit que $\sin x \leq x$ ($\cos c \leq 1$ et $x \geq 0$) et $\tan x \geq x$.

6. *En déduire un encadrement de U_n, puis les valeurs de l' et l.*
Soit $n \geq 1$. L'inégalité de gauche de la question précédente, que l'on a le droit d'utiliser puisque $0 < \dfrac{(2k-1)\pi}{4n} \leq \dfrac{(2n-1)\pi}{4n} < \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, nous donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = \frac{16n^2}{\pi^2} U_n \ .$$

De même, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = \frac{16n^2}{\pi^2} U_n$$
En reportant les valeurs des sommes calculées précédemment, on a donc
$$2n^2 - n \leq \frac{16n^2}{\pi^2} U_n \leq 2n^2 \text{ , d'où } (1 - \frac{1}{2n})\frac{\pi^2}{8} \leq U_n \leq \frac{\pi^2}{8} \text{ .}$$
En appliquant le théorème des gendarmes, on conclut que U_n converge vers $\frac{\pi^2}{8} = l'$. Et finalement $l = \frac{4l'}{3} = \frac{\pi^2}{6}$.