Feuille d'exercices n° 6

Géométrie affine – corrigé

Notations

1. Un espace affine non nommé dans l'énoncé sera noté $\mathcal{E}$.
2. Ses éléments (points) sont notés $A, B, \ldots$
3. L'espace vectoriel sous-jacent à un espace affine sera noté comme l'espace, avec une flèche en plus : $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ pour $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{E}$ pour E, etc.
4. Donnons un numéro à la relation de Chasles, qui sert souvent :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},\ \forall A, B, C \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Premières propriétés

Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine. Utilisez la relation de Chasles pour obtenir : $\forall A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA} = 0$ et $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Solution. Notons que le 0 de l'énoncé est $0_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$. Nous avons (de (1)) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, d'où $\overrightarrow{AA} = 0$.
Par ailleurs, nous avons (de (1)) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ et donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. □

Exercice 2. Milieu. Soient A et B deux points d'un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que, pour un point C de $\mathcal{E}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

(ii) $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de $\{A, B\}$.

Solution. Nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \iff 2\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.
Pour l'existence et l'unicité, notons que C est défini par l'équation $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, qui a une et une seule solution (pourquoi ?). □

Exercice 3. Parallélogramme. Montrer que, pour quatre points A, B, C et D d'un $\mathbb{R}$-espace affine, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(iii) Les milieux de $\{A, C\}$ et $\{D, B\}$ coincident.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants on dit que $ABCD$ est un parallélogramme. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas indépendants, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme aplati.

Solution. « (i) $\iff$ (ii) » Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

« (ii) $\iff$ (iii) » Soit M (respectivement N) le milieu de $\{A,C\}$ (respectivement $\{D,B\}$). Nous avons

$$\begin{aligned} M = N &\iff N \text{ est le milieu de } \{A,C\} \iff \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \\ &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \underbrace{\overrightarrow{NB}}_{=\overrightarrow{DN}\text{ (pourquoi ?)}} + \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

□

Exercice 4. Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

1. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
2. Soient f,g dans E_1. Les éléments $f+g$, $f-g$, $\frac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0 ?
3. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

Solution. 1. Vérifier : (i) que E est un espace vectoriel de dimension $n+1$; (ii) que E_0 est un sous-espace vectoriel de E (donc un espace vectoriel de dimension de finie).

2. Par linéarité de l'intégrale (de Riemann de fonctions continues sur un intervalle compact), nous avons, pour $f,g \in E_1$: (i) $\int_0^1 (f+g)(t)\,dt = 2$, donc $f+g$ n'est ni dans E_1, ni dans E_0 ; (ii) $\int_0^1 (f-g)(t)\,dt = 0$, donc $f-g \in E_0$, mais $f-g \notin E_1$; (iii) $\int_0^1 \frac{f+g}{2}(t)\,dt = 1$, donc $\frac{f+g}{2} \in E_1$, mais $\frac{f+g}{2} \notin E_0$.

3. Si $f,g \in E_1$, posons $\overrightarrow{fg} := g - f$. De 2 (ii), nous avons $\overrightarrow{fg} \in E_0$. La relation de Chasles $\overrightarrow{fg} + \overrightarrow{gh} = \overrightarrow{fh}$ est claire (?). Pour conclure, nous devons montrer que $E_1 \ni g \overset{\Phi_f}{\longmapsto} \overrightarrow{fg} \in E_0$ est une bijection, $\forall f \in E_1$. Clairement (?), $\overrightarrow{fg} = \overrightarrow{fh} \implies g = h$, $\forall f,g,h \in E_1$, et donc Φ_f est injective. Par ailleurs, si $f \in E_1$ et $h \in E_0$, alors $g := f+h$ vérifie (justifier) $g \in E_1$ et $\overrightarrow{fg} = h$. Φ_f est donc surjective. □

Sous-espaces affines

Exercice 5. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ vu comme espace affine.

1. Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y + 4 = 0\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$. Quel est son espace directeur ? Sa dimension ?
2. Trouver un sous-espace affine différent de $\mathcal{D}$ ayant le même espace directeur.
3. Trouver un vecteur u et un point M dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{D} = \{M + tu,\ t \in \mathbb{R}\}$.
4. Montrer que $\mathcal{D}$ est le sous-espace affine engendré par deux points A et B de $\mathbb{R}^2$.

Solution. 1. Rappelons le fait général suivant : les solutions d'un système (non homogène) d'équations linéaires forment un espace affine $\mathcal{D}$ dont l'espace directeur $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est formé par les solutions du système homogène *à condition que le système non homogène ait au moins une solution*.
Dans notre cas, $a := (-2,0)$ est solution, donc $\mathcal{D}$ est un espace affine porté par $\overrightarrow{\mathcal{D}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2x - 3y = 0\}$.
Approche alternative : réécrire l'équation comme $2(x-(-2)) - 3(y-0) = 0$, ou encore $\Phi_{(-2,0)}(x,y) \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$. Comme, clairement, $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est un espace vectoriel, il s'ensuit que $\mathcal{D}$ est un espace affine dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{D}}$.

2. Par exemple, $\widetilde{\mathcal{D}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2x - 3y = -3\}$, qui contient $(0,1)$.

3. À nouveau, le fait général pour les solutions d'un système d'équations linéaires est $\mathcal{D} = \{M + \overrightarrow{v} \,;\, v \in \overrightarrow{\mathcal{D}}\}$, $\forall\, M \in \mathcal{D}$, aka *la solution générale d'un système linéaire non homogène est la somme d'une solution particulière du système non homogène et de la solution générale du système homogène*.
Prenons, dans notre cas, $M := (-2,0)$. Les solutions de l'équation homogène sont $(x, 2/3\,x)$, $x \in \mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D} = \{M + tu \,;\, t \in \mathbb{R}\}$, avec $u := (1, 2/3)$.

4. Prenons $A := M$ et $B := A + u \in \mathcal{D}$. Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine engendré par $\{A,B\}$. Nous avons $\{A,B\} \subset \mathcal{D}$, et donc (pourquoi ?) $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Par ailleurs, nous avons $u = \Phi_A(B) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, et donc $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \mathrm{Vect}(\{u\}) \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$.Il s'ensuit que $\mathcal{D} = (\Phi_A)^{-1}(\overrightarrow{\mathcal{D}}) \subset (\Phi_A)^{-1}(\overrightarrow{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}$ (justifier). Finalement, $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathrm{Aff}\{A,B\}$. □

Exercice 6. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Donner un sous-espace vectoriel F de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $M = (a,b,c)$ un point de $\mathbb{R}^3$ vu comme espace affine. Donner une équation cartésienne du sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par M et de direction F.

Solution. 1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = 0\} = \{(x,y,0) \,;\, x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$.
2. Si E est l'espace affine en question, alors

$$E = (\Phi_{(a,b,c)})^{-1}(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \Phi_{(a,b,c)}(x,y,z) \in F\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z - c = 0\}.$$ □

Exercice 7. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Solution. $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des solutions du système homogène, donc $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{(x, 3x, 5x) \,;\, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(1,3,5)\})$.
Un point de $\mathcal{F}$ est une solution particulière du système non homogène, par exemple $(0, -a-b, -2a-b)$. □

Exercice 8. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3. Soient (u,v,w) une base de $\overrightarrow{E}$, A un point de E et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par u.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un unique plan passant par M_λ et contenant $\mathcal{D}$. On le notera $\mathcal{P}_\lambda$.
2. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_\lambda$ décrit tous les plans contenant $\mathcal{D}$ sauf un. On le note $\mathcal{P}_\infty$. Déterminer la direction de $\mathcal{P}_\infty$ en fonction de u, v, w.

Solution. 1. L'espace directeur, $\overrightarrow{R_\lambda}$, de $\mathrm{Aff}(\{M_\lambda\} \cup \mathcal{D})$ est (justifier)

$$\overrightarrow{R_\lambda} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\overrightarrow{M_\lambda(A+tu)}\,;\, t \in \mathbb{R}\right\}\right) = \mathrm{Vect}(\{-w-\lambda v+tu\,;\, t\in\mathbb{R}\}).$$

Clairement, $-w-\lambda v \in \overrightarrow{R_\lambda}$ et $u = (-w-\lambda v+u)-(-w-\lambda v) \in \overrightarrow{R_\lambda}$. Donc $\overrightarrow{R_\lambda}$ contient $\overrightarrow{Q_\lambda} := \mathrm{Vect}(\{-w-\lambda v, u\}) = \mathrm{Vect}(\{w+\lambda v, u\})$. Par ailleurs, $\{-w-\lambda v+tu\,;\, t\in\mathbb{R}\} \subset \overrightarrow{Q_\lambda}$, d'où (justifier) $\overrightarrow{R_\lambda} \subset \overrightarrow{Q_\lambda}$, et finalement $\overrightarrow{R_\lambda} = \overrightarrow{Q_\lambda}$.
Les vecteurs $w+\lambda v$, u étant indépendants (justifier), il s'ensuit que $\mathbb{R}_\lambda$ est un plan (vectoriel), et donc $\mathrm{Aff}(\{M_\lambda\} \cup \mathcal{D})$ est un plan (affine). Il s'ensuit (justifier) que le seul plan affine contenant M_λ et $\mathcal{D}$ est $\mathrm{Aff}(\{M_\lambda\} \cup \mathcal{D})$, que nous allons noter $\mathcal{P}_\lambda$. $\mathcal{P}_\lambda$ est d'espace directeur $\overrightarrow{Q_\lambda}$ et est donné par (justifier)

$$\mathcal{P}_\lambda = \{M_\lambda + s(w+\lambda v)+tu\,;\, s,t\in\mathbb{R}\}.$$

2. Il faut montrer qu'il existe un et un seul plan $\mathcal{P}_\infty$ passant par $\mathcal{D}$ ne contenant *aucun* des points M_λ (comprendre...). Les points M_λ décrivant la droite affine $\mathcal{E}$ passant par w et d'espace directeur $\mathbb{R}v$, il faut montrer qu'il existe un et un seul plan affine $\mathcal{P}_\infty$ passant par $\mathcal{D}$ et qui n'intersecte pas $\mathcal{E}$.
Essayons de voir le problème de façon géométrique. Données deux droites (affines), $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$, dans l'espace ($\mathbb{R}^3$), alors nous « voyons » que :

(i) Soit elles sont concurrentes, et dans ce cas, clairement, il n'y a aucun plan $\mathcal{P}_\infty$ passant par $\mathcal{D}$ et qui n'intersecte pas $\mathcal{E}$.

(ii) Soit elles sont parallèles (et ne s'intersectent pas), et dans ce cas il y a *une infinité* de plans $\mathcal{P}_\infty$ passant par $\mathcal{D}$ et qui n'intersectent pas $\mathcal{E}$.

(iii) Soit elles ne s'intersectent pas et elle ne sont pas parallèles (« droites en position générale »), et dans ce cas il y a *exactement* un plan $\mathcal{P}_\infty$ passant par $\mathcal{D}$ et qui n'intersecte pas $\mathcal{E}$.

Pour finir notre exercice, nous allons a) prouver (iii) (après l'avoir énoncé proprement) ; b) donner la formule de $\mathcal{P}_\infty$; c) vérifier que dans le cas particulier qui nous intéresse, nous sommes bien dans le cas (iii), et en déduire la formule de $\mathcal{P}_\infty$.

Lemme. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux droites affines de E telles que $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \emptyset$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}} \cap \overrightarrow{\mathcal{E}} = \{0_{\overrightarrow{E}}\}$. Alors :

1. Il existe un et un seul plan affine $\mathcal{P} \subset E$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.
2. Nous avons $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Par conséquent, si A est un point arbitraire de $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbb{R}\overrightarrow{g}$, alors $\mathcal{P} = \{A + s\overrightarrow{f} + t\overrightarrow{g}\,;\, s,t\in\mathbb{R}\}$.

Démonstration du lemme. Existence (et validité de la formule de $\mathcal{P}$). Posons $\overrightarrow{\mathcal{R}} := \overrightarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Alors $\dim \overrightarrow{\mathcal{R}} = 2$ (justifier). Soit $A \in \mathcal{D}$. Alors $\mathcal{R} := A + \overrightarrow{\mathcal{R}}$ est un plan affine (justifier). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathcal{D}} \subset \overrightarrow{\mathcal{R}}$, et donc $\mathcal{D} = A + \overrightarrow{\mathcal{D}} \subset \mathcal{R}$ (justifier). Enfin, montrons que $\mathcal{R} \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Preuve par l'absurde : si $B \in \mathcal{R} \cap \mathcal{E}$, alors (justifier tout ce qui suit) : il existe $\overrightarrow{v} \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{w} \in \mathcal{E}$ tels que $B = A + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Comme $B - \overrightarrow{w} \in \mathcal{E}$ et $A + \overrightarrow{v} \in \mathcal{D}$, nous obtenons $A + \overrightarrow{v} = B - \overrightarrow{w} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$, ce qui contredit l'hypothèse $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.
Unicité. $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ doit contenir $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Si $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ contient également $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, alors : $\overrightarrow{\mathcal{P}} \supset \overrightarrow{\mathcal{D}} \cup \overrightarrow{\mathcal{E}}$, d'où (justifier) $\overrightarrow{\mathcal{P}} \supset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{\mathcal{D}} \cup \overrightarrow{\mathcal{E}}) = \overrightarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Comme, par ailleurs, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est un plan, tout comme $\overrightarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}$ (justifier), nous obtenons que $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Ceci montre que, dans ce cas, $\mathcal{P}$ est celui donné par la formule de l'énoncé.
Pour conclure, il suffit de montrer qu'il est impossible que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ne contienne pas $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Preuve par l'absurde. Sinon, l'intersection $\overrightarrow{\mathcal{P}} \cap \overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une partie stricte de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (justifier). Comme cette intersection est un sous-espace vectoriel

de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, et comme $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une droite, il s'ensuit que cette intersection est réduite à $0_{\overrightarrow{E}}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$ (justifier).
Nous allons montrer que ceci implique $\mathcal{P} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, contradiction qui achève la preuve. En effet, soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{E}$. Alors il existe $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ (justifier). Il s'ensuit (justifier) que $B = A + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, d'où $A + \overrightarrow{v} = B - \overrightarrow{w} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$. □

Vérifions maintenant que le lemme s'applique dans notre cas, et en donnons sa conclusion. Nous avons (vérifier) $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \mathbb{R}u$, $\mathcal{D} = A + \overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbb{R}v$, $\mathcal{E} = A + w + \overrightarrow{\mathcal{E}}$. D'une part (justifier ce qui suit), $\overrightarrow{\mathcal{D}} \cap \overrightarrow{\mathcal{E}} = \{0_{\overrightarrow{E}}\}$, car $\{u, v\}$ est libre. D'autre part, si $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$, alors il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $B = A + tu = A + w + sv$, et donc $w = tu - sv$. Ceci est impossible, car $\{u, v, w\}$ est libre. Ainsi, il n'y a pas de $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$, d'où $\in \mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Les hypothèses du lemme sont satisfaites. Nous concluons à l'existence et unicité de $\mathcal{P}_\infty$, dont l'espace directeur est $\mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$ (ou, ce qui est équivalent, $\mathrm{Vect}(\{u, v\})$). □

Du rab. Montrer le résultat suivant.

Lemme. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension $n \geq 2$. Soient $\mathcal{D} \subset E$, respectivement $\mathcal{E} \subset E$, une droite affine, respectivement un $(n-2)$-sous espace affine, tels que $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \emptyset$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}} \cap \overrightarrow{\mathcal{E}} = \{0_{\overrightarrow{E}}\}$. Alors :

1. Il existe un et un seul $(n-1)$-sous espace affine $\mathcal{P} \subset E$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.
2. Nous avons $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Notons le cas particulier $n = 2$ du lemme ci-dessus, qui a comme un air familier 

Corollaire. Soit E un plan affine. Soient $\mathcal{D}$ une droite affine et $M \in E$ un point qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Alors il existe une et une seule droite affine $\mathcal{E}$ qui passe par M et n'intersecte pas $\mathcal{D}$. Cette droite est de directeur $\overrightarrow{\mathcal{D}}$.

Équations cartésiennes, repères cartésiens

Exercice 9. Soit $R = (0, i, j, k)$ un repère cartésien d'un espace affine (de dimension 3). Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère cartésien (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1.

Solution. Si, dans le repère R_1, nous avons $M(x, y, z)$, alors $\overrightarrow{AM} = xi + yj + zk$. Il s'ensuit que (justifier)

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -i - 2j + k + xi + yj + zk = (-1-z)(-k) + (1-x)(-i) + (y-2)j,$$

et donc dans le repère R_2 nous avons $M(-1-z, 1-x, y-2)$. □

Exercice 10. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathbb{C}^4$ passant par $(1, 0, i, -1)$ et dont l'espace directeur est engendré par $(1, 1, i, -i)$ et $(0, 1+i, 1, -1)$. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{F}$.

Solution. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{(1+s, s+t(1+i), i+si+t, -1-si-t);\, s, t \in \mathbb{C}\}\\ &= \{(x, y, z, \tau) \in \mathbb{C}^4;\, y = (2-i)x + (1+i)y,\ \tau = -ix - z + i - 1\}.\end{aligned}$$

□

Exercice 11. À quelle condition sur le réel a les quatre points $(1,1,a)$, $(2,3,2a)$, $(3,1-a,a-1)$ et $(2,3,3+a)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de a pour lequel ils ne le sont pas, donner la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Solution. La condition nécessaire et suffisante est l'indépendance des vecteurs $(1,2,a)$, $(2,-a,-1)$, $(1,2,3)$, qui équivaut à $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -a & 2\\ a & 2 & 3\end{pmatrix} \neq 0$, et donc à $a \notin \{-4,3\}$.

La règle générale est que la dimension de l'espace affine engendré par un système de points, $\{a_0,\dots,a_k\}$, est le rang de la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{a_0a_1},\dots,\overrightarrow{a_0a_k}\}$. Dans un espace de dimension finie, le calcul du rang revient au calcul du rang de la matrice des coordonnées des vecteurs. En l'occurrence, dans notre cas nous devons déterminer le rang de la matrice ci-dessus pour les valeurs exceptionnelles $a=-4$ et $a=3$.

Pour $a=-4$: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ -4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ est de rang 2 (justifier).

Pour $a=3$: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$ est de rang 2 (justifier).

Dans les deux cas, nous avons donc des plans affines, qui sont donnés par une seule équation, de la forme (*) $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$. On trouve (à un degré de liberté près) les inconnues $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ en imposant que (*) soit satisfaite par les quatre points qui engendrent le plan affine.

Pour $a=-4$, en choisissant (par exemple) $\delta=1$, nous trouvons l'équation $2x-y=1$.

Pour $a=3$, en choisissant (par exemple) $\delta=1$, nous trouvons l'équation $-x-y+z=1$. □

Exercice 12. Soient A et B deux points distincts de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x_A,y_A), respectivement (x_B,y_B) dans un repère cartésien. Montrer que $P(x,y)$ appartient à la droite $\langle A,B\rangle$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_A & x_B & x\\ y_A & y_B & y\end{vmatrix} = 0 \ .$$

Solution. P appartient à $\langle A,B\rangle \iff \overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont liés $\iff (x-x_A, y-y_A)$ et (x_B-x_A, y_B-y_A) sont liés $\iff$ $\begin{vmatrix}x-x_A & x_B-x_A\\ y-y_A & y_B-y_A\end{vmatrix}=0$.

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & x_A & x_B\\ y & y_A & y_B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ x-x_A & x_A & x_B-x_A\\ y-y_A & y_A & y_B-y_A\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}x-x_A & x_B-x_A\\ y-y_A & y_B-y_A\end{vmatrix},$$

d'où la conclusion. □

Du rab. Montrer le résultat suivant.

Lemme. Soient $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ trois points d'un plan affine. Montrer qu'il existe une droite affine qui passe par les trois points $\iff \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\end{vmatrix}=0$.

Indication. Étudier d'abord le cas où les trois points sont confondus. Puis, en utilisant l'Exercice 12, le cas où ils ne le sont pas.

Exercice 13. Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point, $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant A et engendré par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Solution. Préliminaire. Se rappeler et essayer de prouver le fait suivant : si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ est une famille libre, alors :

$$u \in \mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_k\}) \iff \text{la famille } \{u, u_1, \ldots, u_k\} \text{ est liée.}$$

Garanti ce fait, nous raisonnons comme suit. La famille $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ est libre (pourquoi ?), et donc : M appartient au plan passant par A et engendré par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ $\iff$ $\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\})$ $\iff$ $\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ est liée $\iff$ $\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ (car il s'agit de trois vecteurs liés dans $\mathbb{R}^3$). □

Exercice 14. Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des quadruplets (x, y, z, t) tels que $x - y + 2z + 3t = 5$. Montrer que c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera l'espace directeur. Donner un repère cartésien de $\mathcal{F}$; le compléter en un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$.

Solution. $\mathcal{F}$ est non vide, car $A := (5, 0, 0, 0) \in \mathcal{F}$. Il s'ensuit (voir Exercice 5) que l'espace directeur de $\mathcal{F}$ est $\overrightarrow{\mathcal{F}} := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + 2z + 3t = 0\}$ – qui est de dimension 3 (pourquoi ?).
(Justifier ce qui suit.) Si $\{e, f, g\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, alors (A, e, f, g) est un repère cartésien de $\mathcal{F}$. De plus, si nous complétons la première base à une base $\{e, f, g, h\}$ de $\mathbb{R}^4$, alors, (A, e, f, g, h) est un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$.
Travaux pratiques : nous avons

$$\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + 2z + 3t = 0\} = \{(y - 2z - 3t, y, z, t) ; y, z, t \in \mathbb{R}\},$$

et donc :

(a) $\{(1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$;

(b) que l'on peut compléter à $\{(1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$, base de $\mathbb{R}^4$.

(c) $((5, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1))$ est un repère cartésien de $\mathcal{F}$.

(d) $((5, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1))$ est un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$.

□

Espaces affines euclidiens

Exercice 15. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un plan affine euclidien. Montrer la formule : $AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Solution. (Justifier, en se rapportant aux définitions et à l'Exercice 3.) Nous devons montrer que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \implies \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

En utilisant, dans l'ordre, la relation de Chasles (1), l'Exercice 1 et l'hypothèse $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\
&= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC})\\
&= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})\\
&= (\text{preuve par intimidation}) = 4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 16. Préciser, dans un parallélépipède rectangle d'un espace affine euclidien, lesquelles parmi les droites portant les arêtes sont perpendiculaires et lesquelles sont seulement orthogonales.

À vous de jouer.. Faire un dessin et s'en servir pour répondre.

Exercice 17. On définit la médiatrice d'un segment dans le plan affine euclidien E comme l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

1. Montrer que la médiatrice est la droite perpendiculaire au segment menée du milieu du segment.
2. Montrer que les trois médiatrices d'un triangle non aplati sont concourantes. Leur intersection est appelée le centre du cercle circonscrit.
3. Montrer que dans un triangle ABC non aplati et isocèle en A, la hauteur et la médiane relatives au sommet A sont confondues et sont contenues dans la médiatrice de $[BC]$.

Solution. 1. Soit I le milieu de $\{A,B\}$. Nous devons montrer que M est sur la médiatrice de $[AB]$ (c'est-à-dire, M vérifie $MA = MB$), si et seulement si $\overrightarrow{IM}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ (comprendre et justifier...). Or, nous avons (justifier, en utilisant les Exercices 1 et 2)

$$\begin{aligned}
&MA = MB \iff MA^2 = MB^2 \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MB}\\
&\iff (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\\
&\iff (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\\
&\iff (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AI})\\
&\iff (\text{preuve par intimidation})\ \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AI} = 0 \iff \overrightarrow{MI}\cdot((1/2)\overrightarrow{AB}) = 0 \iff \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{AB}$, comme énoncé.

2. *Préliminaire.* Se rappeler et montrer le fait suivant. Si $f : X \to Y$ est une application linéaire *injective* entre deux espaces vectoriels, et si $\mathcal{F} \subset X$ est une famille libre, alors $f(\mathcal{F})$ est une famille libre de Y.

Le triangle étant non aplati, les vecteurs $v := \overrightarrow{AB}$ et $w := \overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Soit $\mathcal{R}$ la rotation d'angle $\pi/2$ de $\overrightarrow{E}$. Alors (justifier, en faisant le calcul en coordonnées dans un repère orthonormé direct de $\overrightarrow{E}$) $v^\perp := \mathcal{R}(v) \perp v$ et $w^\perp := \mathcal{R}(w) \perp w$. Le préliminaire ci-dessus est le fait que $\mathcal{R}$ est bijective nous impliquent que $v^\perp$ et $w^\perp$ ne sont pas colinéaires. De la question 1, $v^\perp$, respectivement $w^\perp$, est un vecteur directeur de la médiatrice de $[AB]$, respectivement de celle de $[BC]$. Ces deux directeurs n'étant pas colinéaires, les deux médiatrices ne sont pas parallèles et donc (puisque nous sommes dans un plan) s'intersectent exactement en un point.[1] Soit O leur point d'intersection. Alors $OA = OB$ et $OA = OC$. Il s'ensuit que $OB = OC$, et donc O est commun aux trois médiatrices.

1. Pour justifier rigoureusement ce fait, utiliser le corollaire qui est à la fin de l'Exercice 8.

3. La hauteur en question est $[AH]$, avec H un point de la droite passant par B et C tel que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$. La médiane est $[AI]$, avec I le milieu de $\{B,C\}$.
Pour répondre à la question, nous allons montrer que :

(a) A appartient à la médiatrice de $[BC]$.

(b) I appartient à la médiatrice de $[BC]$.

(c) I convient comme point H.

(d) H est unique (donc, de (b), $H = I$.

(Vérifier bien que, si nous avons (a)–(d), alors nous aboutissons aux résultats énoncés.)

(a) est clair, car $AB = AC$ (triangle isocèle en A).

(b) suit de l'item 1 : la médiatrice de $[BC]$ passe par I.

(c) : de 1, nous avons A appartient à la médiatrice de $[BC] \implies \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BC}$.

(d) : soit $\mathcal{D}$ la droite qui passe par B et C. Nous devons montrer que $H_1, H_2 \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{AH_j} \perp \overrightarrow{BC}$, $j = 1,2 \implies H_1 = H_2$. Or, nous avons (justifier) $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{AH_2} - \overrightarrow{AH_1} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{H_1H_2} = \lambda\,\overrightarrow{BC}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Des deux propriétés, nous obtenons $0 = \langle \overrightarrow{H_1H_2}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \lambda\,\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle = \lambda\, BC^2$, d'où $\lambda = 0$ et donc $H_1 = H_2$. □

Exercice 18. Soit ABC un triangle (éventuellement aplati) dans un plan affine euclidien.

1. En notant I le milieu de $[BC]$, calculer AI^2 et prouver l'égalité de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2$.
2. Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

Solution. 1. (Justifier ce qui suit, en utilisant l'Exercice 2.) Sous l'hypothèse $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ (ou encore $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BI}$), nous devons montrer l'égalité

$$2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}. \tag{2}$$

En utilisant les identités

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI},\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI},\ \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BI}$$

(qui utilisent la relation de Chasles (1) et l'hypothèse sur I), (2) revient à

$$2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI})\cdot(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) + 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI})\cdot(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) = 4\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI} + 4\,\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BI},$$

qui est vraie (preuve par intimidation ).
2. Nous avons ABC rectangle en $A \iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \iff BC^2 = AB^2 + BC^2$ (se rappeler la preuve de la dernière équivalence). En utilisant l'égalité de la médiane, nous avons

$$ABC \text{ rectangle en } A \iff BC^2 = 2\,AI^2 + BC^2/2 \iff AI^2 = BC^2/4$$

(justifier la dernière égalité). Donc

$$ABC \text{ rectangle en } A \iff A \text{ appartient au cercle de centre } I \text{ et rayon } BC/2,$$

qui est le cercle de l'énoncé. □

Du rab. (a) Montrer que le symétrique D de A par rapport à I, c'est-à-dire un point D tel que I soit le milieu de $\{A,D\}$, existe et est unique.

(b) Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

(c) Établir, pour tout parallélogramme $MNPQ$, l'identité du parallélogramme $MP^2 + NQ^2 = 2(MN^2 + NP^2)$.

(d) Montrer que l'identité du parallélogramme pour $ABDC$ est équivalente à l'égalité de la médiane pour ABC.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de sa structure affine canonique, on considère le plan affine Π passant par $A = (1,2,3)$ et dirigé par $\overrightarrow{\Pi} = \mathrm{Vect}\{(1,2,0),(0,1,2)\}$.

1. Déterminer l'espace vectoriel $\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$.
2. Décrire les points de Π en utilisant A et $\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$. En déduire une équation cartésienne de Π.
3. Calculer la distance du point $M = (1,0,1)$ au plan Π.

Solution. 1. Nous avons (justifier)

$$(x,y,z) \in \overrightarrow{\Pi}^{\perp} \iff \begin{cases} (x,y,z) \perp (1,2,0) \\ (x,y,z) \perp (0,1,2) \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z \\ y = -2z \end{cases},$$

d'où $\overrightarrow{\Pi}^{\perp} = \mathbb{R}(4,-2,0)$.

2. Nous avons (justifier)

$$B \in \Pi \iff B - A := (x,y,z) \in \overrightarrow{\Pi} \iff B - A = (x,y,z) \in \left(\overrightarrow{\Pi}^{\perp}\right)^{\perp} \iff B - A = (x,y,z) \in (4,-2,0)^{\perp}$$

$$\iff B - A = (x,y,z),\ \text{avec } 4x - 2y + z = 0 \iff B = (\underbrace{x+1}_{:=a}, \underbrace{y+2}_{:=b}, \underbrace{z+3}_{:=c}),\ \text{avec } 4x - 2y + z = 0$$

$$\iff B = (a,b,c),\ \text{avec } 4(a-1) - 2(b-2) + (c-3) = 0 \iff B = (a,b,c),\ \text{avec } 4a - 2b + c = 3.$$

Donc nous pouvons définir Π par une équation cartésienne comme suit : $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 4x - 2y + z = 3\}$.

3. Nous allons donner une formule générale et l'appliquer, mais aussi retrouver le résultat de manière directe.

Approche # 1 (en admettant une formule générale). Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la distance du point $x \in \mathbb{R}^n$ à l'ensemble d'équation (**) $\alpha \cdot y = \beta$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$) est $\dfrac{|\alpha \cdot x - \beta|}{\|\alpha\|}$.

Dans le cas particulier de l'exercice, la distance est $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

Approche # 2 (en prouvant la formule). Regardons directement le cas général, celui de l'équation (**) dans $\mathbb{R}^n$. Posons $\mathcal{E} := \{y \in \mathbb{R}^n\,;\, \alpha \cdot y = \beta\}$. Notons que $\mathcal{E}$ est non vide, car $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. En effet, nous avons par exemple $z \in \mathcal{E}$, où $z := \dfrac{\beta}{\|\alpha\|^2}\alpha$ (vérifier). Il s'ensuit (se rappeler l'Exercice 5, item 3) que $\mathcal{E} = z + \overrightarrow{\mathcal{E}}$, où $\overrightarrow{\mathcal{E}} := \{v \in \mathbb{R}^n\,;\, \alpha \cdot v = 0\}$.
Nous allons montrer les résultats suivants :

(a) Il existe un $w \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{xw} \perp \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

(b) Nous avons $xy \geq xw$, $\forall\, y \in \mathcal{E}$ (et donc que la distance de x à $\mathcal{E}$ est xw).

(c) $xw = \dfrac{|\alpha \cdot x - \beta|}{\|\alpha\|}$.

(a) Posons $k := \dfrac{\beta - \alpha \cdot x}{\|\alpha\|^2}$, $w := x + k\alpha$. Alors (vérifier) $\alpha \cdot w = \beta$ (et donc $w \in \mathcal{E}$). Par ailleurs, nous avons $\overrightarrow{xw} = k\alpha$, et donc $v \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \implies \alpha \cdot v = 0 \implies (k\alpha) \cdot v = 0 \implies \overrightarrow{xw} \perp v$, d'où $\overrightarrow{xw} \perp \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

(b) Soit $y \in \mathcal{E}$. Alors (pourquoi ?) $v := \overrightarrow{wy} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Il s'ensuit que

$$\underline{xy^2} = \overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{xy} = (\overrightarrow{xw} + v) \cdot (\overrightarrow{xw} + v) = (\text{justifier}) = \overrightarrow{xw} \cdot \overrightarrow{xw} + v \cdot v = xw^2 + \|v\|^2 \underline{\geq xw^2}.$$

(c) Nous avons

$$xw = \left\|\overrightarrow{xw}\right\| = \|k\alpha\| = |k|\,\|\alpha\| = \frac{|\alpha \cdot x - \beta|}{\|\alpha\|}. \qquad \square$$

Du rab. Montrer que :

(d) w est unique.

Exercice 20. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ et le point M de coordonnées (x_M, y_M). Montrer que la distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par la formule

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Solution. Reprendre la méthode 2 de l'Exercice 19. (Pourquoi ne peut-on l'appliquer directement, et il faut refaire ?) □

Exercice 21. Dans un plan euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé (O, i, j), on considère les droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

Solution. Faisons d'abord le lien avec l'approche # 2 dans l'Exercice 18. La projection orthogonale en question est le point w qui apparaît dans la preuve (comprendre...). Si $M(x, y)$, les trois projections ont donc les coordonnées (vérifier)

$$\left(x - \frac{2}{5}(2x - y + 3), y + \frac{1}{5}(2x - y + 3)\right), \left(x - \frac{1}{5}(x - 2y + 1), y + \frac{2}{5}(x - 2y + 1)\right), \tag{3}$$
$$\left(x - \frac{2}{5}(2x + y - 2), y - \frac{1}{5}(2x + y - 2)\right). \tag{4}$$

Faisons maintenant le lien avec le lemme qui suit l'Exercice 12. L'exigence est qu'il existe une droite qui passe par ces trois projections, ce qui revient à

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x - \frac{2}{5}(2x - y + 3) & x - \frac{1}{5}(x - 2y + 1) & x - \frac{2}{5}(2x + y - 2) \\ y + \frac{1}{5}(2x - y + 3) & y + \frac{2}{5}(x - 2y + 1) & y - \frac{1}{5}(2x + y - 2) \end{vmatrix} = 0.$$

Encore une preuve par intimidation  donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - \frac{2}{5}(2x - y + 3) & \frac{1}{5}(3x + 5) & -\frac{2}{5}(2y - 5) \\ y + \frac{1}{5}(2x - y + 3) & -\frac{1}{5}(3y + 1) & -\frac{1}{5}(4x + 1) \end{vmatrix} = -\frac{1}{25}[(3x + 5)(4x + 1) + 2(2y - 5)(3y + 1)]. \tag{5}$$

L'équation $\Delta = 0$ équivaut à

$$x^2 + \frac{23}{12}x + y^2 - \frac{13}{6}y = \frac{5}{12}. \tag{6}$$

Nous reconnaissons (?) dans (6) l'équation d'un cercle, éventuellement vide (si l'équation n'a pas de solution) ou réduit à un point (si l'équation a une seule solution). Or, il se trouve que les trois droites de l'énoncé sont deux à deux concourantes, leurs points respectifs d'intersection étant (vérifier) $A(-5/3, -1/3)$, $B(-1/4, 5/2)$, $C(3/5, 4/5)$. Il est évident (?) que A, B et C satisfont la condition de l'énoncé. Par exemple : pour A, la projection sur les deux premières droites étant A, elle est forcément colinéaire avec la projection sur la troisième droite. Il s'ensuit que l'ensemble des points est *le* cercle qui passe par A, B et C, autrement dit le cercle circonscrit au triangle ABC. □

Du rab. La propriété que nous avons trouvée n'est pas spécifique aux trois droites de l'exercice. Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

Théorème de la droite de Simson. Soit ABC un triangle non aplati. Alors, pour un point P du plan du triangle, nous avons :

$$\begin{aligned}&\text{les projections de } P \text{ sur les droites } \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle \text{ sont colinéaires}\\ &\iff P \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC.\end{aligned}$$

Pour une (idée de) preuve basée sur la géométrie élémentaire, voir la page Wikipédia sur la droite de Simson

Idée de preuve « analytiqe ». L'idée est tout simplement de reprendre, dans le cas général, la preuve ci-dessus, en prenant soin de se simplifier au maximum les calculs. Les trois droites, d_1, d_2, d_3, qui déterminent le triangle, sont d'équation $\alpha^j \cdot (x,y) = \beta^j$, $j = 1,2,3$. Le vecteur $\alpha^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j)$ étant déterminé à une constante multiplicative près, nous pouvons supposer (justifier)

$$\|\alpha^j\|^2 = 1,\ j = 1,2,3. \tag{7}$$

Les projections qui correspondent, dans le cas particulier de l'exercice, à (3), sont données dans le cas général par

$$(x,y) - \underbrace{(\alpha^j \cdot (x,y) - \beta^j)}_{:=\gamma^j}\alpha^j,\ j = 1,2,3. \tag{8}$$

En reprenant la preuve qui mène à (5), nous obtenons que $P(x,y)$ a la propriété de l'énoncé si et seulement si

$$\Delta := \begin{vmatrix} \gamma^1\alpha_1^1 - \gamma^2\alpha_1^2 & \gamma^1\alpha_1^1 - \gamma^3\alpha_1^3 \\ \gamma^1\alpha_2^1 - \gamma^2\alpha_2^2 & \gamma^1\alpha_2^1 - \gamma^3\alpha_2^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Si nous arrivons à montrer que (9) est l'équation d'un cercle, nous concluons comme dans l'exercice : ce cercle passe par A, B et C, donc il s'agit du cercle circonscrit à ABC. Pour montrer que (9) correspond en effet à un cercle, nous calculons les éléments du déterminant (en remplaçant les γ^j) et obtenons (dernière preuve par intimidation)

$$\Delta = (A_1x + A_2y)(A_4x + A_6y) - (A_2x + A_5y)(A_3x + A_4y) + \text{termes en } x, y \text{ ou libres}, \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned}&A_1 := (\alpha_1^1)^2 - (\alpha_1^2)^2, A_2 := \alpha_1^1\alpha_2^1 - \alpha_1^2\alpha_2^2, A_3 := (\alpha_1^1)^2 - (\alpha_1^3)^2,\\ &A_4 := \alpha_1^1\alpha_2^1 - \alpha_1^3\alpha_2^3, A_5 := (\alpha_2^1)^2 - (\alpha_2^2)^2, A_6 := (\alpha_2^1)^2 - (\alpha_2^3)^2.\end{aligned} \tag{11}$$

La condition (7) donne (vérifier)

$$A_5 = -A_1, A_6 = -A_3. \tag{12}$$

De (10) et (12), nous avons (vérifier)

$$\begin{aligned}\Delta &= (A_1x + A_2y)(A_4x - A_3y) - (A_2x - A_1y)(A_3x + A_4y) + \text{termes en } x, y \text{ ou libres},\\ &= (A_1A_4 - A_2A_3)(x^2 + y^2) + \text{termes en } x, y \text{ ou libres},\end{aligned} \tag{13}$$

et donc (9) est l'équation d'un cercle à condition que $A_1A_4 - A_2A_3 \neq 0$. Cette condition est en effet satisfaite. Preuve par l'absurde. Sinon, (9) est soit l'équation d'une droite, soit l'équation $0 = 0$. Le premier cas ne convient pas, car la droite doit passer par A, B et C. Le second cas revient à : tous les points du plan ont la propriété de l'énoncé. Pour montrer que nous ne sommes pas dans ce cas, il suffit de trouver un point du plan qui ne convient pas. Soit O le centre du cercle circonscrit. Alors ses projections sur les trois droites sont les milieux de $\{A,B\}$, $\{B,C\}$, $\{C,A\}$, qui ne sont pas colinéaires. (Dernier rab : montrer cette dernière propriété.) Donc en effet $A_1 A_4 - A_2 A_3 \neq 0$ et, de (9) et (13), les points qui ont la propriété de l'énoncé sont précisément les points du cercle circonscrit à ABC. □

Exercice 22. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathcal{D}_\lambda$ d'équation

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$

Montrer que les droites $\mathcal{D}_\lambda$ sont toutes tangentes à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Indication : avec quelques valeurs particulières de λ, on trouvera le cercle puis on déterminera la distance entre le centre du cercle et $\mathcal{D}_\lambda$.

Solution. Géométriquement, une droite d est tangente au cercle de centre x et rayon r si et seulement si la distance de x à d est r. Compte tenu de l'Exercice 20, nous cherchons donc $M(x,y)$ et $r > 0$ tels que

$$\frac{|(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - (4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2}} = r, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ce qui revient à (vérifier)

$$\frac{|(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - (4\lambda+2)|}{1+\lambda^2} = r, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Pour déterminer les inconnues x, y et r, nous allons suivre l'indication et donner des valeurs à λ. En faisant, dans (14), $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$, nous obtenons (vérifier) $|y-3| = r$ et $|-y+1| = r$. Il s'ensuit que soit $y - 3 = -y + 1$, ce qui donne $y = 2$ et $r = 1$, soit $y - 3 = -(-y-1)$, ce qui est impossible. Donc $y = 2$ et $r = 1$, ce qui transforme (14) en

$$\frac{|(1-\lambda^2)x + 4\lambda - (4\lambda+2)|}{1+\lambda^2} = 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

En faisant, dans (15), $\lambda = 0$, nous obtenons $|x-2| = 1$, d'où $x = 1$ ou $x = 3$. Par ailleurs, en faisant, dans (15), $\lambda \to \infty$, nous obtenons (justifier) $|x| = 1$, et donc $x = 1$.
Conclusion provisoire : s'il existe un cercle avec les propriétés requises, alors il s'agit du cercle de centre $(1,2)$ et rayon 1. Il reste à montrer que ce cercle a bien la propriété de l'énoncé, ce qui revient à montrer la validité de l'identité

$$\frac{|1-\lambda^2 + 4\lambda - (4\lambda+2)|}{1+\lambda^2} = 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Or, celle-ci est claire (?). □

Du rab. (a) Reprendre l'approche #2 dans la solution de l'Exercice 19 (y compris le rab), et montrer que si la distance de x à d est égale à r, alors d et le cercle de centre x et rayon r ont exactement un point en commun (et donc elles sont, géométriquement, tangentes).

(b) Montrer que, si la distance ci-dessus est $> r$, alors la droite et le cercle ne s'intersectent pas.

(c) Montrer que, si la distance est $< r$, alors la droite et le cercle ont exactement deux points en commun (et sont, donc, géométriquement, sécantes).