

Feuille d'exercices n° 1 : révisions d'algèbre linéaire

I. Espaces vectoriels – Bases

**Exercice 1.** Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Montrer que  $F \cap G = F + G$  si et seulement si  $F = G$ .
2. Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

Solution

Rappel :  $F + G = \{x + y; x \in F, y \in G\}$ .

1. On procède par double implication, en commençant par le sens "facile".  
 $(\Leftarrow)$  : Supposons  $F = G$ . Alors on a  $F \cap G = F \cap F = F$ . On a aussi  $F + G = F + F$ .  
 Montrons finalement  $F + F = F$ . Soit  $z \in F + F$ . Alors  $\exists(x, y) \in (F, F), z = x + y$ , donc  $z \in F$  car  $F$  est un ev. Réciproquement  $\forall x \in F, x = x + 0 \in F + F$ .  
 $(\Rightarrow)$  : Supposons  $F \cap G = F + G$ , montrons  $F = G$ .  
 Soit  $x \in F$ . Alors, astuce,  $x + 0 \in F + G$ , car  $0 \in G$ . Donc  $x + 0 = x \in F + G$ . Ainsi en utilisant l'hypothèse,  $x \in F \cap G$ , d'où  $x \in G$ . De manière analogue, en supposant  $x \in G$ , on obtient  $x \in F$ . D'où  $F = G$ .
2. Double implication aussi.  
 $(\Leftarrow)$  : Supposons  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ . Alors  $F \cup G = G$  (ou  $F$ ) qui est bien sev de  $E$ .  
 $(\Rightarrow)$  : Raisonnons par l'absurde, en supposant que  $F \not\subset G$  et  $G \not\subset F$ . Ainsi  $\exists x \in F, x \notin G$ .  
 Et de même  $\exists y \in G, y \notin F$ . Maintenant  $x + y \in F \cup G$  donc de deux choses l'une.  
 Ou bien  $x + y \in F$ . Alors comme  $x \in F, x + y - x \in F$  donc  $y \in F$  car  $F$  est un sev. D'où  $y \in F$  et on a une contradiction. Ou bien  $x + y \in G$ . Alors comme  $y \in G, x + y - y \in G$  donc  $x \in G$  car  $G$  est un sev. D'où  $x \in G$  et on a une contradiction.  
 Ainsi on a bien la négation de " $F \not\subset G$  et  $G \not\subset F$ " qui est " $F \subset G$  ou  $G \subset F$ ".

**Exercice 2.**

1. Soit  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ . Montrer que  $H$  et  $\text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Soient  $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Solution

Rappel : on dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ , et l'on note  $E = F \oplus G$ , si  $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0\}$ . Le signe  $\oplus$  s'appelle "somme directe". Autre définition équivalente,  $\forall z \in E, \exists!(x, y) \in F \times G, z = x + y$ .

1. Tout d'abord,  $H$  et  $V = \text{Vect}\{(1, 1, \dots, 1)\}$  sont non vides (ils contiennent le vecteur nul), et l'on vérifie facilement la stabilité sous l'addition et la multiplication par  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ils sont donc sev de  $\mathbb{R}^n$ . L'énoncé demande de montrer  $\mathbb{R}^n = H \oplus V$ , avec  $V$ .  
 Vérifions les deux propriétés de la somme directe, en commençant par la deuxième.

Soit  $x \in H \cap V$ . Alors  $x = (\lambda, \dots, \lambda)$  pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $x \in H$  impose  $\sum_{i=1}^n \lambda = n\lambda = 0$ , d'où  $\lambda = 0$  (on suppose bien sûr  $n \geq 1$ ). Donc  $x = (0, \dots, 0)$  est le vecteur nul.

Montrons maintenant  $\mathbb{R}^n = H + V$ . On vérifie trivialement  $H + V \subset \mathbb{R}^n$ , il reste donc à montrer  $\mathbb{R}^n \subset H + V$ .

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Posons  $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  la moyenne des  $x_i$ . Alors on a la décomposition

$$x = \underbrace{(x_1 - s, x_2 - s, \dots, x_n - s)}_{\in H} + \underbrace{s(1, \dots, 1)}_{\in V}$$

Le premier terme à droite du signe = est bien dans  $H$ , car  $\sum_{i=1}^n (x_i - s) = (\sum_{i=1}^n x_i) - ns = 0$  par définition de  $s$ .

*Alternative* On peut aussi procéder par analyse-synthèse. (i) Analyse. On suppose que l'on peut écrire  $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) + s(1, \dots, 1)$  avec  $(y_1, \dots, y_n) \in H$ . Alors on a nécessairement  $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) - s(1, \dots, 1)$  et l'appartenance de  $(y_1, \dots, y_n)$  à  $H$  impose  $\sum_{i=1}^n y_i = 0 = (\sum_{i=1}^n x_i) - ns$  et donc  $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . (ii) Synthèse : on vérifie bien dans ce cas que  $(y_1, \dots, y_n) \in H$  et  $s(1, \dots, 1) \in V$ .

2. Même approche qu'à la question précédente. On vérifie facilement que  $F$  et  $G$  sont sev de  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Soit maintenant  $f \in F \cap G$ . Alors  $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$  et  $f \in F$  impose  $f'(0) = 0 = a$  et  $f(0) = 0 = b$ . Donc  $f$  est la fonction nulle, et on a bien  $F \cap G = \{0\}$ .

On vérifie aussi facilement  $F + G \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , reste à montrer  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset F + G$ . Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Alors on peut écrire

$$f(x) = \underbrace{f(x) - f'(0)x - f(0)}_{\in F} + \underbrace{f'(0)x + f(0)}_{\in G}$$

(Les appartenances respectives à  $F$  et  $G$  se vérifient facilement).

*Alternative* : On peut aussi procéder par analyse-synthèse.

### Exercice 3.

- Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ . Montrer que si  $\dim F + \dim G > n$ , alors  $F \cap G$  contient un vecteur non nul.
- Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les vecteurs  $u = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v = (0, 1, -1, 0)$ ,  $w = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x = (0, 0, 1, 0)$  et  $y = (1, 1, 0, -1)$ . Soit  $F = \text{Vect}(u, v, w)$  et  $G = \text{Vect}(x, y)$ . Quelles sont les dimensions de  $F, G, F+G$  et  $F \cap G$ ?

### Solution

1. Supposons par l'absurde que  $F \cap G = \{0\}$ . Alors  $F \oplus G = F + G$  est un sev de  $E$  donc  $\dim(F \oplus G) \leq n$ . Or on a  $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G > n$ , contradiction.

*Remarque* : En général on a  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  pour tous  $F, G$  sev de  $E$ . Une preuve élégante utilise l'application linéaire  $u : F \times G \rightarrow E, (x, y) \mapsto x - y$ . Le théorème du rang donne  $\dim(F \times G) = \dim \ker u + \dim \text{Im } u$ , et l'on vérifie facilement  $\ker u = F \cap G, \text{Im } u = F + G$ . Comme  $\dim F \times G = \dim F + \dim G$ , le résultat suit. Une preuve plus pédestre consiste à considérer une base  $(h_1, \dots, h_p)$  de  $F \cap G$ , que l'on peut compléter (thm de la base incomplète) en une base  $(h_1, \dots, h_p, f_1, \dots, f_k)$  de  $E$  et une base  $(h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_l)$  de  $F$ . Alors on peut vérifier que  $(h_1, \dots, h_p, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l)$  est une base de  $F + G$ .

On a bien  $\dim(F + G) = p + k + l = (p + k) + (p + l) - p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ .

2. (i) La famille  $(u, v, w)$  est par définition génératrice de  $\text{Vect}(u, v, w)$ . Un calcul simple montre qu'elle est libre,  $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$  implique  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Ainsi c'est une base, il y a trois éléments de base donc  $\dim \text{Vect}(u, v, w) = 3$ .

*Remarque* : Pour montrer que la famille  $(u, v, w)$  est libre, on peut également montrer que

la matrice  $M(u|v|w)$  des vecteurs en colonne a rang maximal, dans ce cas 3. Rappelons que le rang d'une matrice  $A$  est le nombre maximal de vecteurs colonnes (ou lignes) linéairement indépendants, et peut se calculer comme la plus grande taille des matrices carrées inversibles extraites de  $A$ . Or, dans la matrice

$$M(u|v|w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice extraite  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  a déterminant non nul ( $= 1$ ), donc  $\text{rang } M(u|v|w) = 3$  et la famille  $(u, v, w)$  est libre.

(ii) De même  $\dim \text{Vect}(x, y) = 2$ , car la matrice  $M(x|y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  a rang 2, vu que la

matrice extraite  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  a déterminant non nul ( $= -1$ ).

(iii) La famille  $(u, v, w, x)$  est libre car le déterminant de la matrice  $M(u|v|w|x)$  est non nul ( $= -1$ ). Comme il y a 4 éléments, et que  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ , c'est aussi une base de  $\mathbb{R}^4$ , et comme  $F + G$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$  et  $\dim(F + G) = \dim \mathbb{R}^4$ , alors  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

(iv)  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ , donc  $4 = 3 + 2 - \dim(F \cap G)$ , donc  $\dim(F \cap G) = 1$ .

*Remarque :* Comment montrer en dimension finie que si  $F$  est un sev de  $E$  et  $\dim F = \dim E = n$ , alors  $E = F$ ? Par l'absurde. Supposons  $\exists x \in E, x \notin F$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors on vérifie facilement que la famille  $(x, e_1, \dots, e_n)$  est libre dans  $F$  ce qui implique  $\dim F \geq n + 1$  en contradiction avec le fait que  $F$  est un sev de  $E$  de dimension  $n$ .

**Exercice 4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

- On pose  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = e_2 + e_3$  et  $f_3 = e_3 + e_1$ . Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est libre.
- On pose  $g_1 = e_1 + e_2$ ,  $g_2 = e_2 + e_3$ ,  $g_3 = e_3 + e_4$  et  $g_4 = e_4 + e_1$ . Montrer que la famille  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  n'est pas libre.
- On pose  $h_1 = e_1 + e_2$ ,  $h_2 = e_2 + e_3$ ,  $\dots$ ,  $h_{n-1} = e_{n-1} + e_n$  et  $h_n = e_n + e_1$ . La famille de vecteurs  $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n)$  est-elle libre?

#### Solution

Conseil : Pour montrer qu'une famille est libre, utiliser la définition. Pour montrer qu'une famille n'est pas libre (liée), il suffit trouver *une* combinaison linéaire à coefficients non nuls qui s'annule.

- On résoud  $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ce qui donne, en réarrangeant les termes,  $(\alpha + \gamma)e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + (\gamma + \beta)e_3 = 0$  ce qui donne le système

$$\begin{cases} \gamma + \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma + \beta = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Ainsi, la famille est bien libre.

- On vérifie que  $g_2 - g_1 = g_3 - g_4 = 0$ , donc  $g_2 - g_1 + g_4 - g_3 = 0$  et la famille est liée.
- Supposons qu'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que

$$0 = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n = (\alpha_1 + \alpha_n) e_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) e_n.$$

Puisque la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, on obtient le système à  $n$  équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \end{array} \right. \quad \text{d'où suit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\alpha_n \\ \alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_n \\ \alpha_3 = -\alpha_2 = -\alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_n = -\alpha_{n-1} = \pm \alpha_n \quad \text{selon la parité de } n \end{array} \right.$$

De la dernière ligne on déduit que

(i) si  $n$  est impair : on a  $\alpha_n = -\alpha_n$ , donc  $\alpha_n = 0$  et par conséquent  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , ainsi la famille  $(h_1, \dots, h_n)$  est libre ;

(ii) si  $n$  est pair : on a  $\alpha_n = \alpha_n$ , donc  $\alpha_n$  est indéterminé. L'égalité de départ devient  $\alpha_n(-h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - \dots + h_n) = 0$ , d'où suit, pour un  $\alpha_n \neq 0$ , la relation  $h_n = h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + \dots + h_{n-2} - h_{n-1}$ . Ainsi, la famille  $(h_1, \dots, h_n)$  est liée.

*Méthode alternative* : Inspirés par 1. et 2., distinguons selon la parité de  $n$ .

(i)  $n = 2p, p \in \mathbb{N}^*$ . On peut vérifier que

$$S = (h_2 - h_1) + (h_4 - h_3) + \dots + (h_{2p-2} - h_{2p-3}) + (h_{2p} - h_{2p-1}) \quad (1)$$

$$= \underbrace{(e_3 - e_1) + (e_5 - e_3) + \dots + (e_{2p-1} - e_{2p-3})}_{\text{telescopage}} + (e_1 - e_{2p-1}) \quad (2)$$

$$= (e_{2p-1} - e_1) + (e_1 - e_{2p-1}) \quad (3)$$

$$= 0 \quad (4)$$

et la famille est donc liée.

(ii)  $n = 2p + 1, p \in \mathbb{N}^*$ . On utilise la définition : supposons qu'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que

$$0 = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n = (\alpha_1 + \alpha_n) e_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) e_n.$$

Puisque la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, on obtient le système à  $2p + 1$  équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_{2p+1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1} = 0 \end{array} \right.$$

Maintenant, si l'on calcule (2ème ligne - 3ème ligne) + (4ème ligne - 5ème ligne) + ... + (2pème ligne - (2p + 1)ème ligne), on trouve

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2p-1} + \alpha_{2p}) - (\alpha_{2p} + \alpha_{2p+1}) = \alpha_1 - \alpha_{2p+1} = 0$$

En combinant avec la première ligne, on trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_{2p+1} = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_{2p+1} = 0 \end{array} \right. ,$$

qui donne  $\alpha_1 = \alpha_{2p+1} = 0$ , et par suite  $\alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, 2p + 1$ . Donc la famille est libre.

**Exercice 5.** On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^5$  :  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre.

2. Soit  $v \in \mathbb{R}^5$ . À quelle condition  $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  ?

3. Trouver un supplémentaire de  $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

### Solution

1. Utiliser la définition. En alternative, il suffit d'observer que la matrice

$$M(u_1|u_2|u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a rang 3, car la matrice extraite  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  a déterminant non nul ( $= -1$ ).

2.  $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \{\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ . Donc ses éléments se mettent sous la

forme  $v = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma \\ \beta + \gamma \\ \alpha + \beta + 2\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}$  pour  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Un vecteur  $v = (a, b, c, d, e)$  de  $\mathbb{R}^5$  est donc

dans  $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  si et seulement si

$$\begin{cases} a = \alpha + \gamma \\ b = 2\alpha + \beta + 4\gamma \\ c = \beta + \gamma \\ d = \alpha + \beta + 2\gamma \\ e = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \quad \text{d'où suit} \quad \begin{cases} \alpha = 3a - b + c \\ \beta = 2a - b + 2c \\ \gamma = b - 2a - c \\ d = a + c \\ e = 3a - b + 2c \end{cases}$$

Les deux dernières relations sont des contraintes sur le vecteur  $v$  et on conclut que  $v = (a, b, c, d, e) \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  si et seulement si

$$d = a + c \quad \text{et} \quad e = 3a - b + 2c. \quad (*)$$

3. Il suffit de trouver deux vecteurs de  $\mathbb{R}^5$  qui ne vérifient pas les contraintes (\*) et qui sont linéairement indépendants. Par exemple :  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La famille  $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2)$

est alors libre, donc c'est une base de  $\mathbb{R}^5$  car elle a 5 éléments, et  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  est bien un supplémentaire de  $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

## II. Applications linéaires – Théorème du rang

### Théorème du rang (Rappel)

Soient  $E$  et  $F$  deux ev de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$ , et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$$

$\dim \operatorname{Im} u$  s'appelle le rang de  $u$ , et est aussi noté  $\operatorname{rang} u$ . Noter que c'est la dimension de l'espace "de départ", soit  $E$ , qui apparaît dans la formule.

*Preuve* : Supposons  $\ker u \neq \{0\}$ . Soit  $(h_1, \dots, h_p)$  une base de  $\ker u$ . Cette famille est libre dans  $E$ , donc peut être complétée (thm de base incomplète) en une base  $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . Montrons maintenant que la famille  $(u(e_{k+1}), \dots, u(e_n))$  est une base de  $\operatorname{Im} u$ .

(a) Soit  $y \in \operatorname{Im} u$ . Alors  $\exists x \in E, y = u(x)$ . En écrivant  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , on obtient  $y = \sum_{i=p+1}^n x_i u(e_i)$ , donc la famille est bien génératrice de  $\operatorname{Im} u$ .

(b) Reste à montrer qu'elle est libre dans  $\operatorname{Im} u$ . Supposons  $\sum_{i=p+1}^n \lambda_i u(e_i) = 0$ , ce qui peut se ré-écrire  $u(\sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i) = 0$ . Ainsi,  $\sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i \in \ker u$ , donc  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p, \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$ , et comme la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, tous les  $\lambda_i = 0$ .

Ainsi la famille  $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$  est une base de  $\operatorname{Im} u$ , et  $\dim \operatorname{Im} u = n - p$ ,  $\dim \ker u = p$ ,  $\dim E = n$ .

Dans le cas  $\ker u = \{0\}$ , il suffit de considérer une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , et l'on montre que  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une base de  $\operatorname{Im} u$ .

*Remarque* : Le théorème ne signifie pas  $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$ , identité qui est fautive. Par contre, on a  $E = \ker u \oplus V$ , avec  $V$  isomorphe à  $\operatorname{Im} u$ . La preuve construit d'ailleurs explicitement cet isomorphisme.

**Exercice 6.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $u$  :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z). \end{array}$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

### Solution

Pour montrer qu'une application est linéaire, on peut vérifier les deux propriétés  $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ ,  $u(x + y) = u(x) + u(y)$  pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in E$ . Une alternative consiste à vérifier les deux en même temps, via  $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$  pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in E$ .

1.  $u(\lambda(x, y, z, t)) = u((\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)) = (\lambda x + \lambda y + \alpha \lambda z + \lambda t, \lambda x + \lambda z + \lambda t, \lambda y + \lambda z) = \lambda u(x, y, z, t)$ . De même on vérifie facilement  $u((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = u(x, y, z, t) + u(x', y', z', t')$ . Donc  $u$  est linéaire.
2. Commençons par déterminer le noyau. Par définition  $\ker u = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, u(x, y, z, t) = 0\}$ , il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + \alpha z + t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{d'où suit} \quad \begin{cases} (2 - \alpha)y = 0 \\ x + t = -z = y \\ z = -y \end{cases}$$

si l'on soustrait la deuxième équation à la première. Il faut donc maintenant distinguer deux cas

(i)  $\alpha \neq 2$ . Alors  $y = 0$ , d'où  $x + t = 0$  et  $z = 0$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned}\ker u &= \{(x, 0, 0, t) \in \mathbb{R}^4, x + t = 0\} \\ &= \{(x, 0, 0, -x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 0, 0, -1)\}.\end{aligned}$$

(ii)  $\alpha = 2$ . Alors  $z = -y$  et  $t = y - x$ , avec  $x$  et  $y$  indéterminés. Ceci donne un noyau de dimension 2 :

$$\begin{aligned}\ker u &= \{(x, y, -y, y - x), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, 0, -x) + (0, y, -y, y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 1)).\end{aligned}$$

Maintenant déterminons l'image. D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Im } u = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker u$ , avec  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ . Il faut donc distinguer deux cas selon la dimension du noyau :

(i)  $\alpha \neq 2$ . Alors  $\dim \text{Im } u = 4 - 1 = 3$ , et puisque  $\text{Im } u$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$ , forcément on a  $\text{Im } u = \mathbb{R}^3$ .

*Alternative* : sans utiliser le théorème du rang, on peut compléter la base de  $\ker u = \text{Vect}((1, 0, 0, -1))$  en une base de  $\mathbb{R}^4$ , par exemple en choisissant la famille  $((1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$  que l'on vérifie facilement être libre, et on calcule

$$\begin{aligned}\text{Im } u &= \text{Vect}(u(1, 0, 0, 0), u(0, 1, 0, 0), u(0, 0, 1, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1), (\alpha, 0, 1)) = \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

en vérifiant que la famille  $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (\alpha, 0, 1))$  est libre dans  $\mathbb{R}^3$ .

(ii)  $\alpha = 2$ . Alors  $\dim \text{Im } u = 4 - 2 = 2$ . Pour décrire  $\text{Im } u$  comme sev de  $\mathbb{R}^3$ , on peut compléter la base  $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 1))$  de  $\ker u$  en une base  $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$  de  $\mathbb{R}^4$ , et calculer  $u$  sur les vecteurs ajoutés :

$$\begin{aligned}\text{Im } u &= \text{Vect}(u(0, 1, 0, 0), u(0, 0, 1, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 1, 1)).\end{aligned}$$

*Alternative* : sans compléter la base de  $\ker u$ , on peut décrire  $\text{Im } u$  à partir de sa définition (ici, dans le cas  $\alpha = 2$ ) :

$$\text{Im } u = \{(a, b, c) = u(x, y, z, t) = (x + y + 2z + t, x + z + t, y + z), x, y, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

En inversant l'égalité, sous forme de système, on a

$$\begin{cases} a = x + y + 2z + t \\ b = x + z + t \\ c = y + z \end{cases} \quad \text{d'où suit} \quad \begin{cases} a = x + y + 2(c - y) + (b - x - c + y) = b + c \\ t = b - x - z = b - x - c + y \\ z = c - y \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned}\text{Im } u &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = b + c\} = \{(b + c, b, c), b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(b, b, 0) + (c, 0, c), b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1)).\end{aligned}$$

Il est facile de montrer que la base  $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$  engendre bien le même ev de la base précédente  $((1, 0, 1), (2, 1, 1))$ .

**Exercice 7.** Pour chacune des applications qui suit, dire (en le justifiant) si elle est linéaire ou non :

$$1. f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2PP' \end{array}, \text{ où } P' \text{ désigne le polynôme dérivé de } P.$$

2.  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par “ $f(P)$  est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^4 - 5X + 2$ ”.

**Solution**

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(\lambda P) = 2(\lambda P)(\lambda P)' = 2\lambda^2 P P' = \lambda^2 f(P)$ . Donc  $f$  n'est pas linéaire.
2. On rappelle que tout polynôme  $P$  peut s'écrire de manière unique sous la forme  $P(X) = A(X)(X^4 - 5X + 2) + R(X)$ , où  $A(X)$  est un polynôme, et  $R(X)$  est un polynôme de degré  $\leq 3$ .  $R$  est le reste de la division euclidienne, donc  $f(P) = R$ . En notant  $R_1$  le reste pour  $P_1$ , et  $R_2$  le reste pour  $P_2$ , on obtient

$$\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) = (\alpha A_1(X) + \beta A_2(X))(X^4 - 5X + 2) + (\alpha R_1(X) + \beta R_2(X)),$$

où  $\alpha A_1 + \beta A_2$  est bien un polynôme, et le reste  $\alpha R_1 + \beta R_2$  a encore bien degré  $\leq 3$ . Ainsi  $f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2)$ , et  $f$  est linéaire.

**Exercice 8.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$  et que  $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$ .
2. (a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$  si et seulement si  $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ .  
 (b) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$  si et seulement si  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ .  
 (c) Montrer que  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$  si et seulement si  $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$ .
3. (a) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant les propriétés du 2.  
 (b) Les équivalences sont-elles encore vraies en dimension infinie ?

**Solution (exercice plus théorique)**

1. Soit  $x \in \text{ker } u$ , c'est-à-dire  $u(x) = 0$ . Alors  $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$  car  $u$  est linéaire, donc  $x \in \text{ker } u^2$ . Ainsi  $\text{ker } u \subset \text{ker } u^2$ . En particulier,  $\text{ker } u$  est sev de  $\text{ker } u^2$ .  
 Soit  $z \in \text{Im}(u^2)$ . Alors  $\exists x \in E$  tel que  $z = u(u(x))$ . Posons  $y = u(x)$ . Alors bien sûr on a  $z = u(y)$ , donc  $z \in \text{Im } u$ . Ainsi  $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$ . En particulier,  $\text{Im } u^2$  est un sev de  $\text{Im } u$ .
2. (a) Appliquons le théorème du rang à  $u$ . Alors  $\dim E = \dim \text{ker } u + \dim \text{Im } u$ . De même pour  $u^2$ ,  $\dim E = \dim \text{ker } u^2 + \dim \text{Im } u^2$ . Et donc  $\dim \text{ker } u = \dim \text{ker } u^2$  ssi  $\dim \text{Im } u = \dim \text{Im } u^2$ .  
 Maintenant, si  $\dim \text{ker } u = \dim \text{ker } u^2$ , puisque  $\text{ker } u$  est sev de  $\text{ker } u^2$ , on a  $\text{ker } u = \text{ker } u^2$ . De même pour  $\text{Im } u$  et  $\text{Im } u^2$ . Ainsi, on déduit que  $\text{ker } u = \text{ker } u^2$  ssi  $\text{Im } u = \text{Im } u^2$ .  
 (b) On procède par double implication.  
 ( $\Leftarrow$ ) : Supposons que  $E = \text{ker } u \oplus \text{Im } u$ . Pour montrer que  $\text{ker } u^2 = \text{ker } u$ , il suffit de montrer  $\text{ker } u^2 \subset \text{ker } u$ .  
 Soit  $x \in \text{ker } u^2$ , alors  $u(u(x)) = 0$ , et donc  $u(x) \in \text{ker } u$ . Or bien sûr  $u(x) \in \text{Im } u$ . Donc on a  $u(x) \in \text{ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$ . Donc  $u(x) = 0$ , donc  $x \in \text{ker } u$ .  
 ( $\Rightarrow$ ) : Supposons que  $\text{ker } u^2 = \text{ker } u$ . Montrons que  $\text{ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$  dans un premier temps, puis  $E = \text{ker } u \oplus \text{Im } u$  dans un deuxième temps.  
 Soit  $x \in \text{ker } u \cap \text{Im } u$ , alors  $u(x) = 0$  et  $\exists y \in E$  tel que  $x = u(y)$ . Il suit que  $y \in \text{ker } u^2 = \text{ker } u$ , d'où  $y \in \text{ker } u$  et enfin  $x = u(y) = 0$ . Donc  $\text{ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$ . Par conséquent, la somme  $\text{ker } u + \text{Im } u$  est directe, et bien sûr c'est un sev de  $E$ .  
 Reste à montrer que  $\text{ker } u \oplus \text{Im } u = E$ . Par la formule de Grassmann d'abord, et par le théorème du rang ensuite, on a que  $\dim(\text{ker } u \oplus \text{Im } u) = \dim \text{ker } u + \dim \text{Im } u = \dim E$ . Donc  $\text{ker } u \oplus \text{Im } u$  est un sev de  $E$  et ces deux ev ont même dimension, donc ils coïncident.
- (c) On a

$$\begin{aligned} \text{Im } u \subset \text{Im } u^2 &\Leftrightarrow \text{ker } u = \text{ker } u^2 && \text{par 1 et 2 (a)} \\ &\Leftrightarrow E = \text{ker } u \oplus \text{Im } u && \text{par 2 (b)}. \end{aligned}$$



3. (a) Tout isomorphisme  $u$  vérifie les conditions de 2, car  $\ker u = \{0\}$  et  $\text{Im } u = E$ .  
 Sinon, une condition *suffisante* pour garantir  $\text{Im } u = \text{Im } u^2$  est que  $u^2 = u$ . Un endomorphisme qui satisfait cette propriété s'appelle un projecteur.

Par exemple, dans un ev de dimension  $n$  et base  $(e_1, \dots, e_n)$ , l'endomorphisme  $u$  défini par  $u(e_i) = e_1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  est bien un projecteur. Pour  $n = 3$ , cela donne l'exemple

$$u(x, y, z) = (x + y + z, 0, 0), \quad \text{avec } \ker u = \text{Vect}\{e_2, e_3\}, \quad \text{Im } u = \text{Vect}\{e_1 + e_2 + e_3\}.$$

D'autres exemples de projecteurs pour  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= (x, 0, 0), & \text{avec } \ker u &= \text{Vect}\{e_2, e_3\}, & \text{Im } u &= \text{Vect}\{e_1\} \\ u(x, y, z) &= (x, y, 0), & \text{avec } \ker u &= \text{Vect}\{e_3\}, & \text{Im } u &= \text{Vect}\{e_1, e_2\}. \end{aligned}$$

(b) Les équivalences du point 2 ne sont pas valables si  $E$  a dimension infinie. En particulier, la démonstration donnée de (a) fait appel au théorème du rang, qui n'est valable qu'en dimension finie (même s'il existe des généralisations hors programme).

Un contre-exemple au résultat de la question 2a est donné par l'endomorphisme  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $P(X) \mapsto XP(X)$ . En effet, on montre facilement  $\ker u = \ker u^2 = \{0\}$ . Pourtant, le monôme  $X$  est dans  $\text{Im } u$  mais pas dans  $\text{Im } u^2$ , donc  $\text{Im } u \neq \text{Im } u^2$ . Un autre contre-exemple est donné par l'endomorphisme  $v : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $P(X) \mapsto P'(X)$ . On vérifie que  $\text{Im } v = \text{Im } v^2 = \mathbb{R}[X]$ , mais  $\ker v$  est l'ensemble des polynômes constants, tandis que  $\ker v^2$  est l'ensemble des polynôme de degré 1.

**Exercice 9.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\mathcal{B} = (u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^n(x_0))$  forme une base de  $E$ .

1. Montrer que  $u$  est bijective.
2. Montrer qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_0\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

### Solution

1. Puisque un endomorphisme d'un ev de dimension finie est injectif ssi il est surjectif, pour montrer qu'il est bijectif il suffit de montrer qu'il est soit injectif soit surjectif. Normalement il est plus simple de montrer l'injectivité que la surjectivité. Cette fois il est plus simple de montrer que  $u$  est surjective.

Soit  $y \in E$ , alors on peut l'écrire dans la base donnée : il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i u^i(x_0) = u \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i u^{i-1}(x_0) \right) = u(x)$$

où  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u^{i-1}(x_0) = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 u(x_0) + \dots + \lambda_n u^{n-1}(x_0)$  est bien un vecteur de  $E$ . Donc  $u$  est surjectif et par conséquent il est bijectif.

2. On considère la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ . Cette famille comporte  $n + 1$  éléments, elle est donc nécessairement liée car  $\dim E = n$ . Donc,  $\exists b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ , tels que  $(b_0, \dots, b_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  et

$$b_n u^n(x_0) + b_{n-1} u^{n-1}(x_0) + \dots + b_0 x_0 = 0. \quad (5)$$

On peut supposer  $b_n \neq 0$ , car si ce n'était pas le cas, (5) entraînerait que tous les  $b_i = 0$  pour  $i = 0, \dots, n$ , car la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est libre (comme image par la bijection  $u^{-1}$  d'une base). Ainsi, en posant  $a_i = b_i/b_n$ , il vient

$$u^n(x_0) + a_{n-1} u^{n-1}(x_0) + \dots + a_0 x_0 = 0. \quad (6)$$

Définissons alors l'endomorphisme

$$v = u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_0 \text{id}_E,$$

ayant la propriété que  $v(x_0) = 0$ . En appliquant  $u^i$  pour  $i = 1, \dots, n$  à l'équation (6), et en utilisant le fait que  $u^k(u^i(x_0)) = u^i(u^k(x_0))$  pour tout  $k$  et  $i$ , on obtient

$$v(u^i(x_0)) = u^n(u^i(x_0)) + a_{n-1}u^{n-1}(u^i(x_0)) + \dots + a_0u^i(x_0) = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Ainsi,  $v$  s'annule sur tous les éléments de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , donc  $v$  est identiquement nul.

**Exercice 10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est *nilpotent* s'il existe un entier naturel  $p$  tel que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . On dira que  $u$  est *ponctuellement nilpotent* si, pour tout  $x \in E$ , il existe un entier naturel  $p$  (qui dépend de  $x$ ) tel que  $u^p(x) = 0_E$ .

1. Démontrer que tout endomorphisme nilpotent est ponctuellement nilpotent.
2. Démontrer que la réciproque est vraie si  $E$  est de dimension finie.
3. Donner un exemple d'endomorphisme ponctuellement nilpotent non nilpotent.
4. On suppose  $E$  de dimension finie  $n$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent. Démontrer que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

*Indication :* soit  $p$  le plus petit entier strictement positif tel que  $u^p = 0$ , montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que la famille  $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$  soit libre.

#### Solution

1. Supposons que  $u$  est nilpotent et que  $p \in \mathbb{N}$  soit le plus petit entier positif tel que  $u^p = 0$ . Alors, pour tout  $x \in E$  il suffit de choisir  $k \geq p$  (par exemple  $k = p$ ) pour avoir  $u^k(x) = 0$ . Donc  $u$  est ponctuellement nilpotent.
2. Montrons que si  $\dim E$  est finie et  $u$  est ponctuellement nilpotent, alors  $u$  est nilpotent. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Puisque  $u$  est ponctuellement nilpotent, pour tout  $i = 1, \dots, n$  il existe  $p_i \in \mathbb{N}$  tel que  $u^{p_i}(e_i) = 0$  et on a aussi  $u^{q_i}(e_i) = 0$  pour tout  $q_i \geq p_i$ . Donc, en choisissant  $p = \max\{p_1, \dots, p_n\}$ , qui existe car c'est un ensemble fini, on obtient que  $u^p$  est nul sur tous les éléments de la base. Ainsi  $u^p$  est identiquement nul, donc  $u$  est nilpotent.
3. Soit  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $P \mapsto P'$ . Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , alors  $P$  a un degré fini, que l'on note  $k$ , et  $u^{k+1}(P) = 0$ , donc  $u$  est ponctuellement nilpotent. Cependant,  $u$  n'est pas nilpotent car pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $u^k(P) \neq 0$  (par exemple en choisissant un polynôme  $P$  de degré  $k + 1$ ).
4. Soit  $p$  le plus petit entier positif tel que  $u^p = 0$ . Alors  $u^{p-1}$  n'est pas identiquement nul, donc il existe un  $x \in E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ . On a aussi  $u^i(x) \neq 0$  pour tout  $i = 0, \dots, p - 1$ , car sinon on trouverait  $u^{p-1}(x) = 0$ , ce qui contredit notre hypothèse sur  $x$ .  
Considérons maintenant la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ , et montrons qu'elle est libre. Si  $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$ , pour des coefficients  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ , alors en appliquant  $u^{p-1}$  à l'identité précédente, et en sachant que  $u^k = 0$  pour tout  $k > p - 1$ , on trouve

$$0 = u^{p-1} \left( \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) \right) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^{p-1+i}(x) = \lambda_0 u^{p-1}(x).$$

Comme  $u^{p-1}(x) \neq 0$ , il faut que  $\lambda_0 = 0$ . De même, en appliquant  $u^{p-2}$  à  $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$ , il résulte  $\lambda_1 = 0$ , puis successivement  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i = 0, \dots, p - 1$ . Donc cette famille est libre. Comme  $\dim E = n$ , on a nécessairement  $p - 1 < n$ , donc  $p \leq n$ , donc  $u^n = 0$ .

**Exercice 11.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$  si et seulement si la dimension de  $E$  est paire.

### Solution

On procède par double implication.

( $\Rightarrow$ ) : Supposons  $\ker f = \text{Im } f$ , alors d'après le théorème du rang on a  $\dim \ker f + \dim \text{Im } f = 2 \dim \ker f = n$ . La dimension étant un entier,  $n$  est nécessairement pair.

( $\Leftarrow$ ) : Il suffit de construire explicitement un exemple en dimension paire  $n = 2p, p \in \mathbb{N}$ , par exemple comme suit. Soit  $(e_1, \dots, e_{2p})$  une base de  $E$ . Considérons l'endomorphisme  $f$ , qui agit de la manière suivante sur les vecteurs  $e_i$  de la base :

$$\begin{cases} u(e_i) = 0 \\ u(e_{i+p}) = e_i \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Alors par construction on a  $\ker u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  et  $\text{Im } u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \ker u$ . On voit bien que la construction ne marche que si  $n$  est pair, car il est nécessaire de diviser la base en deux familles de même dimension.

Un autre exemple :

$$\begin{cases} u(e_i) = e_i + e_{p+i} \\ u(e_{i+p}) = -(e_i + e_{p+i}) \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

On a alors  $\text{Im } u = \text{Vect}(e_i + e_{i+p}, i = 1, \dots, p)$  de dimension  $p$ . Par le théorème du rang on a alors  $\dim \ker u = 2p - p = p$ , et puisque il est évident que les vecteurs  $e_i + e_{p+i}$  appartiennent à  $\ker u$  pour tout  $i = 1, \dots, p$  (vu que  $u(e_i + e_{p+i}) = u(e_i) + u(e_{p+i}) = 0$ ) et qu'ils sont linéairement indépendants, on a aussi  $\ker u = \text{Vect}(e_i + e_{i+p}, i = 1, \dots, p) = \text{Im } u$ .

## III. Matrices – Changements de base

**Exercice 12.** On considère l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par :

$$u(P) = (1 - X^2)P' - XP',$$

pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

1. Écrire la matrice de  $u$  dans la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de  $u$ .

### Solution

1. Par définition, la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  est la matrice

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(u(1)|u(X)|u(X^2)|u(X^3))$$

obtenue en mettant en colonne les vecteurs image  $u(1), \dots, u(X^3)$  exprimés dans la base  $\mathcal{B}$ . Rappelons que tout polynôme  $P$  se représente dans la base  $\mathcal{B}$  par un vecteur colonne

$$M_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$

Les réels  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  sont les coordonnées de  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Calculons donc l'image par  $u$  des polynômes de  $\mathcal{B}$  :

$$P(X) = 1 \Rightarrow P'(X) = 0, P''(X) = 0 \Rightarrow u(1) = 0$$

$$P(X) = X \Rightarrow P'(X) = 1, P''(X) = 0 \Rightarrow u(X) = -X$$

$$P(X) = X^2 \Rightarrow P'(X) = 2X, P''(X) = 2 \Rightarrow u(X^2) = (1 - X^2)2 - X2X = 2 - 4X^2$$

$$P(X) = X^3 \Rightarrow P'(X) = 3X^2, P''(X) = 6X \Rightarrow u(X^3) = (1 - X^2)6X - X3X^2 = 6X - 9X^3.$$

Par conséquent, on trouve

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

*Alternative :* La matrice  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u)$  se trouve également comme l'unique matrice qui permet de calculer le vecteur qui représente  $u(P)$  dans la base  $\mathcal{B}$  comme produit des matrices représentant  $u$  et  $P$ , c'est-à-dire telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u(P)) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(P).$$

Pour la trouver, il faut d'abord calculer les coordonnées de l'image  $u(P(X))$  pour un polynôme  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$  quelconque :

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 \quad \text{et} \quad P''(X) = 2a_2 + 6a_3X,$$

donc

$$\begin{aligned} u(P(X)) &= (1 - X^2)(2a_2 + 6a_3) - X(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2) \\ &= 2a_2 + (6a_3 - a_1)X - 4a_2X^2 - 9a_3X^3. \end{aligned}$$

Pour avoir

$$\begin{pmatrix} 2a_2 \\ 6a_3 - a_1 \\ 4a_2 \\ -9a_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

il faut donc bien prendre la matrice donnée plus haut, car

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 6a_3 - a_1 \\ 4a_2 \\ -9a_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(P(u)).$$

2. Soit  $P \in \ker u$ . Alors  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$  est tel que  $u(P(X)) = 2a_2 + (6a_3 - a_1)X - 4a_2X^2 - 9a_3X^3 = 0$ , ce qui donne  $a_3 = 0$ ,  $a_2 = 0$  et  $a_1 = 6a_3 = 0$ , en somme  $P(X) = a_0$  est constant. Donc

$$\ker u = \{P(X) = a_0 \in \mathbb{R}_3[X], a_0 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1)$$

a dimension 1. Par le théorème du rang,  $\text{Im } u$  a donc dimension égale à  $4 - 1 = 3$ . Pour trouver une base de  $\text{Im } u$ , il suffit de compléter la base du noyau en la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ , en rajoutant  $X$ ,  $X^2$  et  $X^3$ , et calculer les images  $u(X)$ ,  $u(X^2)$  et  $u(X^3)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \text{Im } u &= \text{Vect}(u(X), u(X^2), u(X^3)) = \text{Vect}(-X, 2 - 4X^2, 6X - 9X^3) \\ &= \text{Vect}(X, 1 - 2X^2, 2X - 3X^3). \end{aligned}$$

**Exercice 13.** On note  $S(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = {}^tA\}$  l'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$  et  $A(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = -{}^tA\}$  l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que  $S(n)$  et  $A(n)$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Calculer la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
3. On considère l'endomorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  défini par  $\phi(A) = {}^tA$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Calculer la trace de  $\phi$ .

Solution

La matrice transposée de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ . Alors, un exemple de matrice symétrique est  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , et celui d'une matrice antisymétrique est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Ces deux ensembles contiennent la matrice nulle, et sont stables par addition et multiplication par un scalaire : pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a
  - (i) si  $A, B \in S(n)$ , i.e.  ${}^tA = A$  et  ${}^tB = B$ , on a  ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda A + \mu B$  donc  $\lambda A + \mu B \in S(n)$ ,
  - (ii) si  $A, B \in A(n)$ , i.e.  ${}^tA = -A$  et  ${}^tB = -B$ , on a  ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = -(\lambda A + \mu B)$  donc  $\lambda A + \mu B \in A(n)$ .

Ce sont donc des sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrons maintenant qu'ils sont supplémentaires.

Soit  $A \in A(n) \cap S(n)$ . Alors  ${}^tA = A = -A$ , donc  $2A = 0$  et  $A = 0$ . Ainsi,  $A(n) \cap S(n) = \{0\}$  et la somme  $S(n) + A(n)$  est directe et forme un sev de  $\mathcal{M}_n(K)$ .

Montrons que  $\mathcal{M}_n(K) = S(n) + A(n)$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\in S(n)} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\in A(n)},$$

autrement dit, toute matrice carrée s'écrit comme somme (forcement unique) d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique. Cela prouve que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S(n) \oplus A(n)$ .

2. Pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , soit  $e_{i,j}$  (souvent notée aussi  $E_{i,j}$ ) la matrice  $n \times n$  dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui à l'intersection de la ligne  $i$  avec la colonne  $j$ , qui vaut 1. Une telle matrice s'appelle élémentaire. L'ensemble  $\mathcal{B}$  des matrices élémentaires d'indices  $(i, j)$ , pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , forme une base de l'ev  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , que l'on appelle base canonique. Évidemment, on a donc  $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ .

Pour connaître la dimension de l'ev  $S(n)$ , on peut compter le nombre de paramètres libres dans une matrice symétrique de taille  $n$  : la diagonale et le triangle supérieur sont libres, le triangle inférieur est au contraire le miroir de celui supérieur et n'est donc pas libre. On a donc  $n$  paramètres libres sur la diagonale,  $n - 1$  sur la 1ère ligne du triangle supérieur,  $n - 2$  sur la 2ème ligne,  $n - 3$  sur la 3ème ligne et ainsi de suite jusqu'à 1 paramètre libre sur la  $(n - 1)$ ème ligne. Au total, on a

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

paramètres libres, donc  $\dim S(n) = \frac{1}{2}n(n + 1)$ . On peut vérifier qu'une base de  $S(n)$  est fournie par les matrices symétriques  $f_{i,j} = e_{i,j} + e_{j,i}$  pour tous les  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

La dimension de l'ev  $A(n)$  peut se calculer comme nombre de paramètres libres dans une matrice antisymétrique (0 sur la diagonale,  $n - 1$  sur la 1ère ligne, etc), ou bien se déduit de la décomposition  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S(n) \oplus A(n)$  par la formule de Grassmann :

$$\dim A(n) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim S(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n(n - 1).$$

Une base de  $A(n)$  est fournie par les matrices antisymétriques  $g_{i,j} = e_{i,j} - e_{j,i}$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ . L'union des deux familles  $(f_{i,j}, 1 \leq i \leq j \leq n)$  et  $(g_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n)$  forme une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alternative à la base canonique.

3. Considérons pour  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la base  $\mathcal{B}'$  formée des matrices symétriques  $f_{i,j}$  et antisymétriques  $g_{i,j}$  et choisissons un ordre total  $<$  dans cette base pour représenter les coordonnées de toute matrice  $M$ . Par exemple, l'ordre lexicographique dans lequel  $f_{i,j} < g_{i',j'}$  pour tout  $i, j, i', j'$ ,  $f_{i,j} < f_{i',j'}$  si  $i < i'$  ou si  $i = i'$  et  $j < j'$ , et pareil pour  $g_{i,j} < g_{i',j'}$ . Ce choix permet d'exprimer toute matrice  $M$  de taille  $n \times n$  par ses  $n^2$  coordonnées, également la matrice  $\phi(M) = {}^tM$  par ses  $n^2$  coordonnées, et enfin de calculer la trace de l'endomorphisme  $\phi$  comme trace de la matrice  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$  de taille  $n^2 \times n^2$  qui le représente dans la

base  $\mathcal{B}'$ , où l'on rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients qui se trouvent sur la diagonale.

On vérifie aisément que  $u(f_{i,j}) = f_{i,j}$  et  $u(g_{i,j}) = -g_{i,j}$ , ce qui nous permet de déterminer que les éléments de la diagonale de  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\phi)$  sont 1 où  $-1$  (d'ailleurs la matrice est diagonale dans cette base). Ainsi,

$$\text{Tr } \phi = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} -1 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$$

**Exercice 14.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix},$$

et soient  $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = 2x\}$  et  $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$ .

1. Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , en donner une base et la dimension.
2. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ .
3. Soit  $e_1$  un vecteur directeur de  $E$  et  $(e_2, e_3)$  une base de  $F$ . Calculer la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .

#### Solution

1. Soient  $x, y \in \mathbb{R}^3$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors si  $u(x) = 2x$ ,  $u(y) = 2y$ , on a bien  $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = 2\lambda x + 2\mu y = 2(\lambda x + \mu y)$ . Puisque  $u(0) = 0$ , on a bien  $0 \in E$ , donc  $E$  est non vide. En somme,  $E$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$ . Même raisonnement pour  $F$ .

Cherchons la dimension et une base de  $E$  et de  $F$ . Pour  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , on a

$$u(x) = A^t x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10x_1 + 8x_2 - 4x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 8x_1 - 16x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

On déduit que  $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$  ssi  $u(x) = 2x$  ssi (calculs)  $x_2 = x_1$  et  $x_3 = -2x_1$ , donc

$$E = \{x = (x_1, x_1, -2x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, -2))$$

et  $\dim E = 1$ . De même, on déduit que  $x = (x_1, x_2, x_3) \in F$  ssi  $u(x) = -2x$  ssi (calculs)  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ , donc

$$F = \{x = (x_1, x_2, -x_1 + 2x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 2))$$

et  $\dim F = 2$ .

2. Soit  $x \in E \cap F$ . Alors  $u(x) = 2x = -2x$ , donc  $u(x) = 0$ . De même, si  $u(x) = 0$  alors  $x \in E \cap F$ . Ainsi, on a  $E \cap F = \ker u$ . On montre assez facilement, en résolvant le système associé, que  $\ker u = \{0\}$ .

Or, on a montré à la question précédente que  $\dim E = 1$  et  $\dim F = 2$ , et comme  $E \cap F = \{0\}$ , alors  $\dim(E + F) = \dim(E \oplus F) = 2 + 1 = 3$ . Et donc  $E + F = E \oplus F = \mathbb{R}^3$ .

3. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base de  $\mathbb{R}^3$ . On veut calculer la matrice  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(u(e_1)|u(e_2)|u(e_3))$ . On a  $u(e_1) = 2e_1$  car  $e_1 \in E$ , et  $u(e_2) = -2e_2$  et  $u(e_3) = -2e_3$  car  $e_2, e_3 \in F$ . Donc

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.**

1. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont la même trace.
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que toutes les matrices de  $u$  ont la même trace.
3. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , les matrices  $A^k$  et  $B^k$  ont la même trace.

**Solution**

1. Notons  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = (B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Alors  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$  et donc  $\text{Tr } AB = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i,k} A_{ik}B_{ki}$ . De même, on a  $(BA)_{ij} = \sum_k B_{ik}A_{kj}$  et donc  $\text{Tr } BA = \sum_{i,k} B_{ik}A_{ki}$ . Les noms des indices sont neutres, donc  $\text{Tr } BA = \text{Tr } AB$ .

*Remarque :* On a  $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ , et donc  $\text{Tr } ABC = \text{Tr } CAB = \text{Tr } BCA$ , mais pas  $\text{Tr } ABC = \text{Tr } CBA$  en général.

2. Toutes les matrices de  $u$  sont semblables, donc en notant  $H$  l'ensemble des matrices de  $u$ , on a que  $\forall M, M' \in H, \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $M' = Q^{-1}MQ$ . Et en utilisant la question précédente, il suit que  $\text{Tr } M' = \text{Tr } Q^{-1}MQ = \text{Tr } QQ^{-1}M = \text{Tr } M$ .
3.  $A$  et  $B$  sont semblables, donc  $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $B = Q^{-1}AQ$ . On a alors

$$B^n = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}AQ) \dots (Q^{-1}AQ) = Q^{-1}AQQ^{-1}A \dots QQ^{-1}AQ = Q^{-1}A^nQ.$$

Donc  $A^n$  et  $B^n$  sont semblables, et ont même trace.

**Exercice 16.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  définie par  $u(x, y, z) = (x - y, y + z, x + y + 2z, x)$ .

1. Écrire la matrice  $A$  de  $u$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^4$ .

2. Montrer que  $A$  est équivalente à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Solution**

1. Soit  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Alors les colonnes de  $A$  sont les coordonnées des vecteurs  $u(e_i)$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , exprimés dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$ , c'est-à-dire

$$A = M_{\mathcal{B}}(u(e_1)|u(e_2)|u(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Deux matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes ssi  $\exists P, Q$  inversibles telles que  $B = Q^{-1}AP$ . Une caractérisation utile : deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang. La matrice suggérée par l'énoncé a évidemment rang 3 car les trois vecteurs colonnes sont linéairement indépendants. Pour  $A$  on peut utiliser le théorème du rang. On a (petit calcul)  $\ker A = \{0\}$ , donc l'image a dimension  $3 - 0 = 3$ . Donc  $A$  et l'autre matrice ont même rang, elles sont donc équivalentes.

**Exercice 17.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On pose } \varepsilon_1 = (1; 1; 1), \varepsilon_2 = (1; -1; 0), \varepsilon_3 = (1; 0; 1) \text{ et } \mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  constitue une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Écrire la matrice  $M$  de  $u$  dans cette base. Quelle relation lie  $A$  et  $M$  ?
3. Déterminer une base de  $\text{Ker } u$  et de  $\text{Im}(u)$ .

### Solution

1. On vérifie facilement que la famille  $\mathcal{B}$  est libre. Comme elle possède 3 éléments, c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
En alternative,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  ssi la matrice de passage, appelée aussi matrice du changement de base,

$$P = P_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}_c}(\varepsilon_1 | \varepsilon_2 | \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (i.e. a rang 3). C'est le cas, puisque

$$\det P = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

2. On cherche  $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1) | u(\varepsilon_2) | u(\varepsilon_3))$ . Calculons :

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= u(\varepsilon_1) + u(\varepsilon_2) + u(\varepsilon_3) = (3 + 1 - 3)e_1 + (-1 + 1 + 1)e_2 + (1 + 1 - 1)e_3 \\ &= (e_1 + e_2 + e_3) = \varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$u(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_1) - u(\varepsilon_2) = (3 - 1)e_1 + (-1 - 1)e_2 = 2(e_1 - e_2) = 2\varepsilon_2,$$

$$u(\varepsilon_3) = u(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = (3 - 3)e_1 + (-1 + 1)e_2 + (1 - 1)e_3 = 0.$$

Ainsi, la matrice  $M$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  s'écrit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Noter qu'elle est diagonale.

La relation entre  $A$  et  $M$  est donnée par la matrice de passage  $P = P_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}}$  et par son inverse

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

que l'on calcule avec le pivot de Gauss. Notamment, on a

$$\begin{aligned} M &= M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}_c}(u) P_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}} \\ &= P^{-1} A P, \end{aligned}$$

donc  $M$  et  $A$  sont semblables. Puisque  $M$  est diagonale, on dit que l'on a diagonalisé  $A$ .

3.  $\text{ker } u = \text{Vect}(\varepsilon_3)$  et  $\text{Im } u = \text{Vect}(u(\varepsilon_1), u(\varepsilon_2)) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

**Exercice 18.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On définit l'application :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & AM - MA. \end{array}$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire.
2. (a) En calculant  $u(I_n)$ , déterminer s'il existe des matrices  $A$  telles que l'application  $u$  soit injective.  
(b) Existe-il des matrices  $A$  telles que l'application  $u$  soit surjective ?
3. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$  où  $a \in \mathbb{C}$ . Donner la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .



Solution

- $u_A(\lambda M + \mu M') = A(\lambda M + \mu M') - (\lambda M + \mu M')A = \lambda(AM - MA) + \mu(AM' - M'A) = \lambda u_A(M) + \mu u_A(M')$ , donc  $u_A$  est linéaire.
- (a)  $u_A(I_n) = AI_n - I_n A = A - A = 0$ . Donc pour tout  $A$ ,  $I_n \in \ker u_A$ , donc  $\ker u_A \neq \{0\}$  donc  $u_A$  n'est jamais injective, quel que soit le choix de  $A$ .  
 (b)  $u_A$  est un endomorphisme et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est un ev de dimension finie, donc  $u_A$  est surjective ssi  $u_A$  est injective. Or, ceci n'arrive jamais d'après (a).
- Attention il s'agit d'une matrice  $4 \times 4$ , car  $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = 4$ . En écrivant la base canonique  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= Ae_1 - e_1A = -e_2 + e_3, \\ u(e_2) &= Ae_2 - e_2A = -e_1 - e_2 + e_4, \\ u(e_3) &= Ae_3 - e_3A = e_1 + e_3 - e_4, \\ u(e_4) &= Ae_4 - e_4A = e_2 - e_3. \end{aligned}$$

Et donc, en posant  $U$  la matrice de  $u$  dans la base canonique, on a

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 19.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rang de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}$ .

Solution

- Si on interprète  $A$  comme la matrice qui représente un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , dans une base donnée, le rang de  $A$  est le rang de  $u$ , c'est-à-dire la dimension de  $\text{Im } u$  (qu'on note aussi  $\text{Im } A$ ). Une possibilité pour le calculer est de déterminer d'abord le noyau de  $A$  (c'est-à-dire le noyau de  $u$ ) en résolvant l'équation  $AX = 0$ . On trouve (calcul)  $\ker A = \{0\}$  sauf si  $m = 0$  où  $m = \pm 2$ , auquel cas c'est un sev de dimension 1. En utilisant le théorème du rang, on trouve alors  $\dim \text{Im } A = 2$  si  $m = 0, \pm 2$ , et  $\dim \text{Im } A = 3$  sinon.

*Alternative :* le calcul du déterminant de  $A$  donne  $\det A = m(m+2)(m-2)$ . Donc  $A$  est inversible (et par conséquent son rang est 3) si  $m \neq 0, \pm 2$ . Sinon, si  $m = 0$  ou  $m = \pm 2$ , on peut vérifier qu'au moins deux vecteurs colonnes de  $A$  sont linéairement indépendants (ou également qu'il y a bien une matrice extraite de  $A$  inversible et de taille 2), donc  $A$  a rang 2.

- Raisonnement similaire. On trouve  $\ker B = \{0\}$  sauf si  $m = 0$  ou  $m^4 = 1$  (soit  $m = \pm 1$  car  $m \in \mathbb{R}$ ) auquel cas c'est un sev de dimension 1. Ainsi  $\dim \text{Im } A = 2$  si  $m = 0$  ou  $m = \pm 1$  et  $\dim \text{Im } B = 3$  sinon.

*Alternative :*  $\det B = m(m^4 - 1) = m(m-1)(m+1)(m^2+1)$ , donc  $B$  est inversible (et par conséquent elle a rang 3) si  $m \neq 0, \pm 1$ . Sinon, au moins deux vecteurs colonnes se trouvent être linéairement indépendants, donc  $B$  a rang 2.

**Exercice 20.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A^2 = \lambda A$ .

### Solution

Si  $A$  est de rang 1, alors  $\dim \operatorname{Im} A = 1$ . Soit  $e$  l'unique vecteur de la base de  $\operatorname{Im} A$ .  $\operatorname{Im} A^2$  est sev de  $\operatorname{Im} A$  (cf. exo 8), donc ou bien  $\operatorname{Im} A^2 = \{0\}$  auquel cas  $A^2 = 0$  et l'égalité demandée est vérifiée pour  $\lambda = 0$ , ou bien  $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$ . Alors, en désignant par  $u$  l'endomorphisme représenté par  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^3$ , il existe un  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(u(e)) = \lambda u(e)$ , et donc par linéarité  $u(u(x)) = \lambda u(x)$ , qui signifie  $A^2 = \lambda A$ .

*Alternative :* On sait que deux matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Puisque  $A$  a rang 1,  $A$  est équivalente à toute matrice de rang 1, par exemple à la

matrice élémentaire  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ . Il existe donc deux matrices inversibles  $P = (p_{ij})$  et

$Q = (q_{ij})$  telles que  $A = QE_{11}P$ , et on a donc  $A^2 = QE_{11}PQE_{11}P$ . Par calculs successifs on trouve

$$QE_{11} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \cdots \\ q_{21} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ q_{n1} & 0 & \cdots \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad PQE_{11} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_{1i}q_{i1} & 0 & \cdots \\ \sum_{i=1}^n p_{2i}q_{i1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \sum_{i=1}^n p_{ni}q_{i1} & 0 & \cdots \end{pmatrix},$$

et enfin

$$E_{11}PQE_{11} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_{1i}q_{i1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n p_{1i}q_{i1} E_{11}.$$

Si on pose  $\lambda = \sum_{i=1}^n p_{1i}q_{i1} \in \mathbb{K}$ , on a donc

$$A^2 = QE_{11}PQE_{11}P = Q(\lambda E_{11})P = \lambda QE_{11}P = \lambda A.$$

## IV. Inversibilité

**Exercice 21.** Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solution

On utilise le pivot de Gauss, ou bien on résout le système linéaire  $AX = b$ , qui donne  $X = A^{-1}b$  si l'inverse existe. On trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Voici les calculs avec le pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} (A|I_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) = (I_3|A^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B|I_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \\
&\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \\
&\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) = (I_3|B^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(C|I_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \\
&\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) = (I_3|C^{-1})
\end{aligned}$$

**Exercice 22.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A + 2I_2$ .
2. En déduire que la matrice  $A$  est inversible et expliciter son inverse.
3. Pour tout entier  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
4. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \geq 2$ .

### Solution

1. On trouve  $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$ .

2. *Raisonnement par analyse-synthèse.*

*Analyse :* Supposons que  $A$  est inversible, et donc que  $A^{-1}$  existe. Alors en multipliant à gauche (ou à droite) l'équation précédente par  $A^{-1}$ , on trouve  $A - 3I_2 + 2A^{-1} = 0$ , ce qui donne  $A^{-1} = (3I_2 - A)/2$ .

*Synthèse :* Finalement, la matrice  $B = (3I_2 - A)/2$  est bien définie et on vérifie (ne pas oublier cette étape) qu'on a bien  $AB = BA = I_2$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B = (3I_2 - A)/2$ .

*Méthode alternative :* L'identité  $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$  s'écrit également  $I_2 = \frac{1}{2}(3A - A^2)$ . En factorisant  $A$  à gauche et ensuite à droite, on trouve

$$I_2 = A \frac{3I_2 - A}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{3I_2 - A}{2} A.$$

La matrice  $B = \frac{1}{2}(3I_2 - A)$  est bien définie et vérifie donc les identités de l'inverse de  $A$ . Puisque l'inverse est unique (quand elle existe), on a bien  $A^{-1} = \frac{3I_2 - A}{2}$ .

3. Soit  $R_n(X)$  le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ . On a  $X^n = X^{n-2}(X^2 - 3X + 2) + 3X^{n-1} - 2X^{n-2}$ , d'où l'on obtient  $R_n(X) = 3R_{n-1}(X) - 2R_{n-2}(X)$ .  $R_n$  est nécessairement un polynôme de degré 1, donc  $R_n(X) = a_nX + b_n$  et en identifiant les coefficients il vient  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ ,  $b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$ . Les conditions initiales sont  $a_0 = 0, a_1 = 1$  et  $b_0 = 1, b_1 = 0$ . On peut vérifier par récurrence  $a_n = 2^n - 1$  et  $b_n = -(2^n - 2)$  pour  $n \geq 1$ , et donc  $R_n(X) = (2^n - 1)X - (2^n - 2)$ .

*Alternative :* On remarque que  $X = 1$  et  $X = 2$  sont racines de  $X^2 - 3X + 2$ , et en utilisant l'écriture de la division euclidienne il vient  $2^n = R_n(2)$  et  $1 = R_n(1)$ , ce qui donne aussi  $R_n(X) = (2^n - 1)X - (2^n - 2)$ .

4. On a l'écriture  $X^n = P_n(X)(X^2 - 3X + 2) + R_n(X)$  où  $P_n$  est un polynôme. En utilisant ce résultat pour la matrice  $A$ , on obtient  $A^n = P_n(A) \underbrace{(A^2 - 3A + 2)}_{=0} + R_n(A)$ . Et donc

$$\begin{aligned} A^n &= (2^n - 1)A - (2^n - 2)I_2 = \begin{pmatrix} 1 - 2^n - (2^n - 2) & -2(2^n - 1) \\ 3(2^n - 1) & 4(2^n - 1) - (2^n - 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2(1 - 2^n) \\ 3(2^n - 1) & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exercice 23.** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on ait

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrer que  $A$  est inversible.

### Solution

Pour montrer que  $A$  est inversible, il suffit de montrer que  $\ker A = \{0\}$ . Soit  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  un vecteur colonne tel que  $AX = 0$ . On a  $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ , donc  $X$  vérifie le système à  $n$  équations (une pour chacun des  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0.$$

Considérons maintenant l'indice  $j_0$  correspondant à la composante  $x_{j_0}$  de  $X$  de plus grande valeur absolue, c'est-à-dire telle que  $|x_{j_0}| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ . La  $j_0$ -ième équation du système peut se réécrire

$$-x_{j_0}a_{j_0j_0} = \sum_{j=1, j \neq j_0}^n a_{j_0j}x_j,$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|x_{j_0}||a_{j_0j_0}| = \left| \sum_{j=1, j \neq j_0}^n a_{j_0j}x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq j_0}^n |a_{j_0j}||x_j| \leq |x_{j_0}| \sum_{j=1, j \neq j_0}^n |a_{j_0j}|.$$

Si  $x_{j_0} \neq 0$ , il suit de l'inégalité précédente que  $|a_{j_0j_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq j_0}^n |a_{j_0j}|$ , qui contredit l'hypothèse  $\sum_{j=1, j \neq j_0}^n |a_{j_0j}| < |a_{j_0j_0}|$ . On a donc  $x_{j_0} = 0$ , d'où suit que  $x_i = 0$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire que  $X = 0$ . Ainsi,  $A$  est inversible.

## V. Sommes directes

**Exercice 24.** Trouver trois sous-espaces vectoriels  $F_1, F_2, F_3$  de  $\mathbb{R}^3$  (deux de dimension 1 et un de dimension 2 par exemple) tels que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

1.  $F_i \cap F_j = \{0\}$  pour  $i \neq j$ ,
2.  $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 + F_3$ ,
3.  $\mathbb{R}^3$  n'est pas la somme directe des  $F_i$ .

### Solution

Soit  $F_1 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ ,  $F_2 = \text{Vect}((0, 0, 1))$ ,  $F_3 = \text{Vect}((1, 1, 1))$ .

Alors on peut vérifier que  $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2 + F_3$ . On a aussi  $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1 = \{0\}$ .

Par contre, on n'a pas  $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ , car l'écriture d'un élément de  $\mathbb{R}^3$  comme somme d'éléments dans  $F_1, F_2, F_3$  n'est pas unique. Ainsi, par exemple,

$$\underbrace{(1, 1, 1)}_{\in \mathbb{R}^3} = \underbrace{(1, 1, 1)}_{\in F_3} = \underbrace{(1, 0, 0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0, 1, 0)}_{\in F_2} + \underbrace{(0, 0, 1)}_{\in F_2}$$

**Exercice 25.** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Soient  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$  des familles génératrices respectives de  $F_1, \dots, F_p$ . Montrer que la réunion des  $\mathcal{G}_i$  est une famille génératrice de  $F_1 + \dots + F_p$ .
2. Montrer que les  $F_i$  sont en somme directe si et seulement si pour toutes bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $F_1, \dots, F_p$  respectivement, la famille  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est libre.
3. Montrer que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si pour toutes bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $F_1, \dots, F_p$  respectivement, la famille  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$ .
4. Montrer que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si  $E = F_1 + \dots + F_p$  et  $\dim E = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$ .

### Solution

1. On note  $\mathcal{G}_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{k_i}^{(i)})$  les bases. Soit  $x_i \in F_i$ . Alors  $x_i$  peut s'écrire  $x_i = \sum_k \lambda_k e_k^{(i)}$ . Soit  $x \in \sum_{i=1}^p F_i$ . Alors  $x = \sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p \sum_k \lambda_k e_k^{(i)}$ . Ainsi  $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{G}_i$  est génératrice de  $\sum_{i=1}^p F_i$ .
2. Les  $F_i$  sont en somme directe ssi  $E = \sum_{i=1}^p F_i$  et  $\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p F_i, x = \sum_{i=1}^p x_i$ . L'existence est déjà garantie (question 1), il reste donc à considérer l'unicité.  
 $(\Leftarrow)$  : Supposons  $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$  est libre. Montrons l'unicité, par l'absurde. On suppose deux écritures  $x = \sum_i x_i = \sum_i x'_i$ . Alors  $0 = \sum_i (x_i - x'_i) = \sum_i \sum_k (\lambda_k^{(i)} - \lambda'_k{}^{(i)}) e_k^{(i)} = 0$  donc  $\lambda_k^{(i)} = \lambda'_k{}^{(i)}$  car  $\bigcup_i \mathcal{G}_i$  est libre. Contradiction.  
 $(\Rightarrow)$  : On prouve l'autre sens par contraposée, c'est à dire en prouvant que si  $\bigcup_i \mathcal{G}_i$  était liée, alors on pourrait trouver une autre écriture de  $x$ . C'est le cas car si la famille est liée, on peut exprimer l'un des éléments de la famille en fonction des autres, et utiliser ceci pour trouver une deuxième écriture.
3.  $(\Rightarrow)$  : Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  alors d'après la question précédente, la famille  $\bigcup \mathcal{B}_i$  est libre. De plus, on a  $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim F_i$  et cette quantité coïncide avec le nombre d'éléments dans la famille  $\bigcup \mathcal{B}_i$ . Cette dernière est donc une base.  
 $(\Leftarrow)$  : Si  $\bigcup \mathcal{B}_i$  est une base, alors, par l'absurde, si l'on avait deux écritures  $x = \sum_i x_i = \sum_i x'_i$ , on parviendrait facilement à une contradiction avec le fait que la famille est libre.
4.  $(\Rightarrow)$  : Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ , alors on a déjà montré que  $\sum_{i=1}^p \dim F_i = \dim E$ .  
 $(\Leftarrow)$  : Supposons que  $E = F_1 + \dots + F_p$  et que  $\dim E = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$ . Pour tout  $i = 1, \dots, p$ , soit  $\mathcal{B}_i$  une base de  $F_i$  et notons  $\#\mathcal{B}_i$  la cardinalité de  $\mathcal{B}_i$  (c'est-à-dire la dimension de  $F_i$ ). D'un côté, on a que

$$\# \left( \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \#\mathcal{B}_i = \sum_{i=1}^p \dim F_i = \dim E,$$

parce que a priori les bases  $\mathcal{B}_i$  peuvent avoir des vecteurs en commun. De l'autre, on a (par la question 1) que  $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$  est une famille génératrice de  $F_1 + \dots + F_p = E$ , donc

$$\# \left( \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i \right) \geq \dim E.$$

On déduit que  $\#(\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i) = \dim E$ , et donc que l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$  est une base de  $E$ .  
D'après la question 3, la somme  $F_1 + \cdots + F_p = E$  est donc directe.