Contrôle 2

Exercice 1 :
Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation :

$$7x + 5y = 3$$

Correction

$$7 = 1 \times 5 + 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

Donc $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 1 \times 5) = -2 \times 7 + 3 \times 5$
On multiplie cette égalité par 3 : $-6 \times 7 + 9 \times 5 = 3$. On soustrayant $7x + 5y = 3$ et $-6 \times 7 + 9 \times 5 = 3$ on trouve que : $7(x + 6) + 5(y - 9) = 0$, ce qui équivaut à $7(x + 6) = -5(y - 9)$, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5(y - 9)$ et $7 \wedge 5 = 1$ donc 7 divise $y - 9$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$y - 9 = 7k$, ce que je remplace dans $7(x + 6) = -5(y - 9)$ ce qui donne $7(x + 6) = -5 \times 7k$, puis en simplifiant par 7 : $x + 6 = -5k$.
L'ensemble des solution est $\mathcal{S} = \{(-6 - 5k, 9 + 7k), k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 2 :
Déterminer la plus petite solution positive du système :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \quad [11] \\ x \equiv 3 \quad [13] \end{cases}$$

Correction
On cherche une solution particulière de $13a + 11b = 1$, ce qui est possible puisque $11 \wedge 13 = 1$
$13 = 1 \times 11 + 2$, $11 = 5 \times 2 + 1$ et $2 = 2 \times 1 + 0$
Donc $1 = 11 - 5 \times 2 = 11 - 5 \times (13 - 1 \times 11) = -5 \times 13 + 6 \times 11$
Comme 11 et 13 sont premier entre eux, on peut appliquer le théorème des restes chinois.
On pose $M = 11 \times 13 = 143$, $M_1 = 13$, $M_2 = 11$, on cherche y_1 tel que $M_1 y_1 \equiv 1 \ [11] \Leftrightarrow 13y_1 \equiv 1 \ [11]$
Et y_2 tel que $M_2 y_2 \equiv 1 \ [13] \Leftrightarrow 11y_2 \equiv 1 \ [13]$, soit, en regardant l'égalité $1 = -5 \times 13 + 6 \times 11$, $y_1 = -5$ et $y_2 = 6$ conviennent. L'unique solution modulo 143 est :

$$x = 6 \times 13 \times (-5) + 3 \times 11 \times 6 \quad [143] \equiv 6 \times (-65 + 33) \ [143] \equiv -6 \times 32 \quad [143] \equiv -192 \quad [143]$$

Les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont de la forme $x = -186 + 143k$, $k \in \mathbb{Z}$. La plus petite solution positive est :

$$x = -192 + 2 \times 143 = -192 + 286 = 94$$

Exercice 3 :
Déterminer le $PGCD(2244{,}1089)$ et déterminer l'identité de Bézout correspondante.
Correction
$2244 = 2 \times 1089 + 66$, $1089 = 16 \times 66 + 33$ et $66 = 2 \times 33 + 0$
Donc $PGCD(2244{,}1089) = 33$ et

$$33 = 1089 - 16 \times 66 = 1089 - 16 \times (2244 - 2 \times 1089) = -16 \times 2244 + 33 \times 1089$$

Exercice 4 :
Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $12x \equiv 5 \ [35]$
Correction

$$12x \equiv 5 \ [35] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 12x = 5 + 35k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 12x - 35k = 5$$

$35 = 2 \times 12 + 11$, $12 = 1 \times 11 + 1$ et $11 = 1 \times 11 + 0$
Donc $1 = 12 - 1 \times 11 = 12 - 1 \times (35 - 2 \times 11) = -1 \times 35 + 3 \times 12$
Donc $3 \times 12 \equiv 1 \quad [35]$

$$12x \equiv 5 \ [35] \Rightarrow 3 \times 12x \equiv 3 \times 5 \ [35] \Rightarrow x \equiv 15 \ [35]$$

Réciproque $12 \times 15 = 180 = 5 \times 35 + 5 \equiv 5 \quad [35]$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{15 + 35k, k \in \mathbb{Z}\}$
Exercice 5 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Correction

$$5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n} = 5^2 \times 5^n + 3 \times 3^n \times (5^2)^n = 25 \times 5^n + 3 \times 3^n \times 25^n \quad [7] \equiv 4 \times 5^n + 3 \times 3^n \times 4^n \ [7]$$
$$\equiv 4 \times 5^n + 3 \times 12^n \quad [7] \equiv 4 \times 5^n + 3 \times 5^n \quad [7] \equiv 7 \times 5^n \quad [7] \equiv 0 \ [7]$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Exercice 6 :

Soient $a = 2n + 1$ et $b = 5n + 1$ deux entiers.

1°) Déterminer deux entiers u et v tels que $au + bv = 3$

2°) En déduire les valeurs possibles de $d = PGCD(a, b)$?

3°) Montrer que si $n \equiv 1 \quad [3]$ alors $d = 3$, que vaut d sinon ?

Correction

1°) $5a - 2b = 5(2n + 1) - 2(5n + 1) = 3$

2°) d divise 3, donc $d = 1$ ou $d = 3$.

3°) Si $n \equiv 1 \quad [3]$, $a = 2n + 1 \equiv 3 \quad [3] \equiv 0 \ [3]$ donc 3 divise a et $b = 5n + 1 \equiv 6 \quad [3] \equiv 0 \ [3]$ donc 3 divise b. 3 est un diviseur commun à a et à b, donc $d \geq 3$, dans ce cas $d = 3$.

Si $n \equiv 0 \quad [3]$ alors $a = 2n + 1 \equiv 1 \quad [3] \not\equiv 0 \ [3]$ donc 3 ne divise pas a, 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d = 1$. Si $n \equiv 2 \quad [3]$ alors $a = 2n + 1 \equiv 5 \quad [3] \equiv 2 \quad [3] \not\equiv 0 \ [3]$ donc 3 ne divise pas a, 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d = 1$.