Correction : Devoir à la maison 1

Exercice 1 :

1°) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On posera

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

2°) En déduire la valeur de

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2$$

On pourra calculer $S(2n)$

Correction

1°) On appelle (H_n) l'égalité $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Si $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\frac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{2\times3}{6} = 1$ sont égaux donc (H_1) est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = [11^2 + 2^2 + \cdots + n^2] + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{n+1}{6}[2n^2 + 7n + 6]$$

Les racines de $2X^2 + 7X + 6 = 0$ sont -2 et $-\frac{3}{2}$ donc $2X^2 + 7X + 6 = 2(X+2)\left(X + \frac{3}{2}\right) = (X+2)(2X+3)$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+1}{6} \times (n+2)(2n+3) = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)(2(n+1)+1)}{6}$$

Donc (H_n) entraine (H_{n+1}). L'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

2°) On remarque que $S(2n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$

D'autre part

$$S(2n) = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 + 4\times1^2 + 4\times2^2 + \cdots + 4\times n^2 = T(n) + 4(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$= T(n) + 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = T(n) + 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

On en déduit que : $T(n) = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(2n+1)}{3}[4n+1-2(n+1)] = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n(2n+1) - n(n+1) = n^2$

Exercice 2 :

Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs augmenté de 1 est le carré d'un entier.

On pourra calculer $n(n+3)$ et $(n+1)(n+2)$.

Correction

$n(n+3) = n^2 + 3n$ et $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$

4 entiers consécutifs s'écrivent $n(n+1)(n+2)(n+3)$

Donc

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = [n(n+3)][(n+1)(n+2)] + 1 = [n^2+3n][n^2+3n+2] + 1$$

$$= [(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1] + 1 = (n^2+3n+1)^2 - 1 + 1 = (n^2+3n+1)^2$$

$n^2 + 3n + 1$ est un entier donc $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ est le carré d'un entier.

Exercice 3 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$. On pourra utiliser la formule du binôme.

Correction

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k = C_n^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k$$

Donc $(n+1)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k = C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \cdots + C_n^n n^n = n^2 + n^2(C_n^2 + \cdots + C_n^n n^{n-2})$$

Donc n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 4 :

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k$

Correction

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!}$$

On pose $k' = k - 1$, si $k = 1$ alors $k' = 0$ et si $k = n$ alors $k' = n - 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!\,\big((n-1)-k'\big)!} = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,\big((n-1)-k\big)!}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k 1^k 1^{n-k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Autre correction sans utiliser les sommes

$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + 3 \times C_n^3 + \cdots + (n-1) C_n^{n-1} + n C_n^n$

$$= 1 \times \frac{n!}{(n-1)!\,1!} + 2 \times \frac{n!}{(n-2)!\,2!} + 3 \times \frac{n!}{(n-3)!\,3!} + \cdots + (n-1) \frac{n!}{\big(n-(n-1)\big)!\,(n-1)!} + n \frac{n!}{(n-n)!\,n!}$$

$$= n \frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + n \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + n \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots + n \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!}$$
$$+ n \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}$$

$$= n \left[\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!} \right]$$

$= n[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}]$

$=$

$n\big[C_{n-1}^0 1^0 1^{(n-1)-0} + C_{n-1}^1 1^1 1^{(n-1)-1} + C_{n-1}^2 1^2 1^{(n-1)-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-2} 1^{n-2} 1^{(n-1)-(n-2)} +$
$C_{n-1}^{n-1} 1^{n-1} 1^{(n-1)-(n-1)}\big] = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$

Exercice 5 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$

Correction

On appelle (H_n) l'égalité $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$

Si $n = 1$ on a $1(1!) = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$, l'égalité est vérifiée.

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) + (n+1)(n+1)! = [1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!)] + (n+1)(n+1)!$$
$$= [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)! = (n+1)!\,(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$$
Donc (H_n) entraine (H_{n+1}), donc (H_n) est vraie pour tout $n > 0$.

Exercice 6 :

On considère la fonction f (fonction d'Ackermann) de deux variables m et n dans $\mathbb{N}$ définie par :
$f(0,n) = n + 1$ (1)
$f(m,0) = f(m-1,1)$ pour $m \geq 1$ (2)
$f(m,n) = f(m-1, f(m,n-1))$ pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$ (3)
Montrer que :
1) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(1,k) = k + 2$
2) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(2,k) = 2k + 3$
3) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(3,k) = 2^{k+3} - 3$

Correction

1) On appelle (H_k) l'égalité $f(1,k) = k + 2$
$f(1,0) = f(0,1) = 1 + 1 = 2 = 0 + 2$
La première égalité vient de (2) et la seconde vient de (1)
On suppose que l'on a (H_k)
$f(1,k+1) = f(0,k+2) = k + 2 + 1 = k + 3 = (k+1) + 2$ donc (H_k) entraine (H_{k+1})
Donc (H_k) est vraie pour tout k.

2) On appelle (H'_k) l'égalité $f(2,k) = 2k + 3$.
$$f(2,1) = f\big(1, f(2,0)\big) = f\big(1, f(1,1)\big) = f(1,3) = 3 + 2 = 5 = 2 \times 1 + 3$$
La première égalité vient de (3), la seconde de (2), la troisième du 1) et la quatrième du 1)
Donc (H'_1) est vraie.
$$f(2,k+1) = f\big(1, f(2,k)\big) = f(1,2k+3) = 2k + 5 = 2(k+1) + 3$$
La première égalité vient de (3), la seconde de l'hypothèse de récurrence et la troisième du 1).
Donc (H'_k) entraine (H'_{k+1}), l'égalité est vraie pour tout $k \geq 1$.

3) On appelle (H''_k) l'égalité $f(3,k) = 2^{k+3} - 3$
$$f(3,1) = f\big(2, f(3,0)\big) = f\big(2, f(2,1)\big) = f(2,5) = 2 \times 5 + 3 = 13 = 16 - 3 = 2^4 - 3$$
La première égalité vient de (3), la seconde vient de (2), la troisième du 2), la quatrième du 1).
Donc (H''_1) est vraie.
$$f(3,k+1) = f\big(2, f(3,k)\big) = f(2, 2^{k+3} - 3) = 2(2^{k+3} - 3) + 3 = 2^{k+4} - 6 + 3 = 2^{(k+1)+3} - 3$$
La première égalité vient de (3), la seconde de l'hypothèse de récurrence et la troisième du 2).
Donc (H''_k) entraine (H''_{k+1}), l'égalité est vraie pour tout $k \geq 1$.