
Feuille d'exercices n° 10 - Correction

Calculs d'intégrales et de primitives

Exercice 1.

1. La dérivée de $x \mapsto \ln(2x+4)$ sur $]-2,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{2}{2x+4}$, donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{2x+4}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} \times \frac{2}{2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[\ln(2x+4)]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}[\ln 6 - \ln 2] = \frac{3}{2}\ln 3.$$

2. La dérivée de $x \mapsto \tan x$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$ est $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, donc :

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\pi/3} = \sqrt{3}.$$

3. La dérivée de $x \mapsto e^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3e^{3x+1}$, donc :

$$\int_0^1 e^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 3e^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[e^{3x+1}]_0^1 = \frac{1}{3}[e^4 - e].$$

4. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, donc :

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x+1}]_1^3 = 2(2-\sqrt{2}).$$

5. La dérivée de $x \mapsto \arcsin x$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

6. La dérivée de $x \mapsto (\sin x)^8$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 8\cos x(\sin x)^7$, donc :

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^7 \cos x\;\mathrm{d}x = \frac{1}{8}[(\sin x)^8]_0^{\pi} = 0.$$

7. La dérivée de $x \mapsto -\ln(\cos x)$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$ est $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, donc :

$$\int_0^{\pi/6} \tan x\;\mathrm{d}x = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/6} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. La dérivée de $x \mapsto x^3 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3x^2 - 2$, donc :

$$\int_0^1 \frac{9x^2-6}{x^3-2x+5}\,\mathrm{d}x = 3[\ln|x^3-2x+5|]_0^1 = 3(\ln 4 - \ln 5).$$

9. La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{(x^2-4)^3}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ est $x \mapsto \frac{-6x}{(x^2-4)^4}$, donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x^2-4)^4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^2-4)^3}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

10. On fait une intégration par parties en considérant les fonctions $u\colon x \mapsto \sin x$ et $v'\colon x \mapsto e^{-x}$, alors $u'\colon x \mapsto \cos x$ et $v\colon x \mapsto -e^{-x}$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc :
$$\int_0^\pi e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x = [-\sin x e^{-x}]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi e^{-x}\cos x \, \mathrm{d}x.$$
On fait une deuxième intégration par parties, avec $g\colon x \mapsto \cos x$ et à nouveau $v'\colon x \mapsto e^{-x}$, ainsi :
$$\int_0^\pi e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x e^{-x}]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x,$$
par conséquent, $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$.

11. On fait une intégration par parties en considérant les fonctions $u\colon x \mapsto \arctan x$ et $v'\colon x \mapsto 1$, alors $u'\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $v\colon x \mapsto x$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc :
$$\int_0^1 \arctan x \, \mathrm{d}x = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

12. On fait une intégration par parties en considérant les fonctions $u\colon x \mapsto \ln(1+x^2)$ et $v'\colon x \mapsto 3x^2$, alors $u'\colon x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ et $v\colon x \mapsto x^3$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc :
$$\begin{aligned}\int_0^1 3x^2\ln(x^2+1)\, \mathrm{d}x &= [x^3\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^4}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = \ln 2 - 2\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2\left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 + \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2+3>0$, on cherche les primitives sur $\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}\int \frac{2x-5}{2x^2+3}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2x}{2x^2+3} - \frac{5}{2x^2+3}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2x^2+3) - \int \frac{5}{3}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(2x^2+3) - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C = \frac{1}{2}\ln(2x^2+3) - \frac{5}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C,\end{aligned}$$
où $C \in \mathbb{R}$.

   (b) On cherche les primitives sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$, alors :
$$\int \frac{4}{(x-1)^5}\mathrm{d}x = \frac{-1}{(x-1)^4} + C,$$
où $C \in \mathbb{R}$.

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+5>0$, on cherche les primitives sur $\mathbb{R}$, alors :
$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,\end{aligned}$$
où $C \in \mathbb{R}$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, on cherche donc des primitives sur $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ ou $]2, +\infty[$. On décompose maintenant la fraction rationnelle en éléments simples, en faisant d'abord la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & & & & x^2 - 3x + 2 \\
-x^4 + 3x^3 - 2x^2 & & & & x^2 + 3x + 7 \\
\hline
3x^3 - 2x^2 & & & & \\
-3x^3 + 9x^2 & -6x & & & \\
\hline
7x^2 & -6x & & & \\
-7x^2 + 21x - 14 & & & & \\
\hline
15x - 14 & & & &
\end{array}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 = (x^2-3x+2)(x^2+3x+7)+15x-14$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$,

$$\frac{x^4}{x^2-3x+2} = x^2 + 3x + 7 + \frac{15x-14}{(x-1)(x-2)} = x^2 + 3x + 7 + \frac{16}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

On en déduit :

$$\int \frac{x^4}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 + 3x + 7 + \frac{16}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7x + 16\ln|x-2| - \ln|x-1| + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

(e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et x^2+x+1 n'admet pas de racine réelle, on cherche donc des primitives sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
On cherche des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\dfrac{x^2}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$.
On multiplie cette relation par $x-1$, puis on évalue en 1, on trouve $a = 1/3$. Ensuite, en évaluant en 0, on trouve $c = 1/3$. Enfin, on multiplie la relation par x, puis on fait tendre x vers $+\infty$, alors $b = 2/3$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\frac{x^2}{x^3-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

(f) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, alors :

$$\frac{3x^2}{1-x^2} = \frac{3(x^2-1)+3}{1-x^2} = -3 + \frac{3}{(1+x)(1-x)} = -3 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

On cherche des primitives sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$, alors :

$$\int \frac{3x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(-3 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\right)\mathrm{d}x = -3x + \frac{3}{2}\left(\ln|1+x| + \ln|1-x|\right) + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

2. $2 \in]1, +\infty[$, ainsi F est définie sur $]1, +\infty[$, donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$F(x) = -3x + \frac{3}{2}\left(\ln(1+x) + \ln(x-1)\right) + C.$$

Or $F(2) = -6$, d'où $-6 + \frac{3}{2}\ln 3 + C = -6$, donc $C = -\frac{3}{2}\ln 3$. Finalement :

$$F\colon]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -3x + \frac{3}{2}\left(\ln(1+x) + \ln(x-1)\right) - \frac{3}{2}\ln 3.$$

Exercice 3.

1. $\int \cos^3 x \ \mathrm{d}x = \int \cos x(1-\sin^2 x) \ \mathrm{d}x$, on pose $u = \sin x$ alors $\mathrm{d}u = \cos x \ \mathrm{d}x$, ainsi :

$$\int \cos^3 x \ \mathrm{d}x = \int (1-u^2) \ \mathrm{d}u = u - \frac{u^3}{3} + C, \ C \in \mathbb{R}$$

Donc, l'ensemble des primitives de $x \mapsto \cos^3 x$ est $\left\{x \mapsto \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C \ : \ C \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 &= \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} e^{ikx}e^{-i(4-k)x} = \frac{1}{2^4}\left[e^{-4ix} + 4e^{-2ix} + 6 + 4e^{2ix} + e^{4ix}\right] \\ &= \frac{1}{2^3}\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + \frac{4}{2^3}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{6}{2^4} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

D'où les primitives sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. On pose $u = \cos x$, alors $\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin x \cos x}\mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x}\mathrm{d}x &= -\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)u} \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)\right)\mathrm{d}u = \left[\ln u - \frac{1}{2}(\ln(1-u) + \ln(1+u))\right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \\ &= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \left(\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}\right)\right) \\ &= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} \\ &= \ln\sqrt{2} - \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 4 \\ &= \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

2. On pose $u = \sin x$, alors $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x &= \int_{1/2}^{1} \frac{1-u^2}{u^4}\mathrm{d}u = \int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u}\right]_{1/2}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 2\right) \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{5\,\mathrm{ch}\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x + 4} = \dfrac{1}{5\frac{e^x+e^{-x}}{2} + 3\frac{e^x-e^{-x}}{2} + 4} = \frac{1}{4e^x+e^{-x}+4} = \dfrac{e^x}{4e^{2x}+4e^x+1}$.
On pose $u = e^x$, alors $\mathrm{d}u = e^x \,\mathrm{d}x$, ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{5\,\mathrm{ch}\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x + 4} = \int_1^e \frac{du}{4u^2+4u+1} &= \int_1^e \frac{du}{(2u+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^e \frac{-2}{(2u+1)^2}\,du = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2u+1}\right]_1^e \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e+1} - \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

4. On pose $u = \cos x$, alors $\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{2}/2}^{0} \frac{-3}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = 3\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(1+u)(1-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{3}{2}\left[\ln(1+u)-\ln(1-u)\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{3}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

5. On pose $u = \sqrt{x}$, alors $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} &= \int_0^2 \frac{2u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^2\left(2-\frac{2}{1+u}\right)\mathrm{d}u = \left[2u-2\ln(1+u)\right]_0^2 \\
&= 4-2\ln 3.
\end{aligned}$$

6. On pose $u = \tan\frac{x}{2}$, alors $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1+u^2)\,\mathrm{d}x$ et $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right]^2}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$