Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2020-2021**

L1 Math-Info — UE : Fondamentaux des mathématiques II

Feuille d'exercices n° 7

Applications linéaires

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (0,2y)$;
2. $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+3,y)$;
3. $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y^2,x-y)$;
4. $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+z,y+z)$;
5. $f_5 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x+y+z$;
6. $f_6 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x,2x,-3x)$.

Correction.

1. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 = (x_1,y_1), u_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$ et donc
$$f_1(\lambda u_1 + u_2) = (0, 2(\lambda y_1 + y_2)) = (0, \lambda 2y_1) + (0, 2y_2) = \lambda(0,2y_1) + (0,2y_2) = \lambda f(u_1) + f(u_2).$$
Donc, f_1 est une applicaion linéaire.
2. L'application f_2 n'est pas linéaire puisque $f_2(0,0) = (3,0) \neq (0,0)$.
3. L'application f_3 n'est pas linéaire puisque $f_3(2 \times (0,1)) = f_3(0,2) = (4,-2) \neq 2f(0,1) = 2(1,-1)$.
4. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 = (x_1,y_1,z_1), u_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$ et donc
$$\begin{array}{rcl} f_4(\lambda u_1 + u_2) & = & \big((\lambda x_1 + x_2) + (\lambda z_1 + z_2), (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2)\big) \\ & = & \big(\lambda(x_1+z_1) + (x_2+z_2), \lambda(y_1+z_1) + (y_2+z_2)\big) \\ & = & \big(\lambda(x_1+z_1), \lambda(y_1+z_1)\big) + \big(x_2+z_2, y_2+z_2\big) \\ & = & \lambda f_4(u_1) + f_4(u_2). \end{array}$$
L'application f_4 est donc linéaire.
5. Soient $u_1 = (x_1,y_1,z_1),\ u_2 = (x_2,y_2,z_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
$$\begin{array}{rcl} f_5(\lambda u_1 + u_2) & = & (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) \\ & = & \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) \\ & = & \lambda f_5(u_1) + f_5(u_2) \end{array}$$
Donc, f_5 est une application linéaire.
6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
$$\begin{array}{rcl} f_6(\lambda x + y) & = & (\lambda x + y, 2(\lambda x + y), -3(\lambda x + y)) \\ & = & \lambda(x, 2x, -3x) + (y, 2y, -3y) \\ & = & \lambda f_6(x) + f_6(y) \end{array}$$
Donc, l'application f_6 est linéaire.

Exercice 2. Considérons l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction.

1. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 = (x_1,y_1,z_1), u_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$ et donc
$$\begin{aligned} f(\lambda u_1 + u_2) &= \big(-2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2),\ (\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2)\big) \\ &= \big(\lambda(-2x_1 + y_1 + z_1) + (-2x_2 + y_2 + z_2),\ \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2)\big) \\ &= \lambda\big(-2x_1 + y_1 + z_1,\ x_1 - 2y_1 + z_1\big) + \big(-2x_2 + y_2 + z_2,\ x_2 - 2y_2 + z_2\big) \\ &= \lambda f(u_1) + f(u_2). \end{aligned}$$
L'application f est donc bien linéaire.
2. On a
$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y + z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1)). \end{aligned}$$
Comme $(1,1,1)$ est un vecteur non nul, il forme donc une base de $\ker(f)$.
Par le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$, c'est-à-dire $3 = 1 + \mathrm{rg}(f)$ d'où l'on tire $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Nous avons vu dans la question précédente que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, lui-même de dimension 2. Il en résulte que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (f est donc surjective). Par conséquent, n'importe quelle base de $\mathbb{R}^2$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$; on peut par exemple prendre la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
On considère l'homothétie de rapport α, c'est-à-dire l'application $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \alpha(x,y)$.

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(h)$.
3. Montrer que h est surjective.

Correction.

1. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 = (x_1,y_1), u_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$ et donc
$$\begin{aligned} h(\lambda u_1 + u_2) &= \alpha\big(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2\big) \\ &= \lambda\alpha(x_1,y_1) + \alpha(x_2,y_2) \\ &= \lambda h(u_1) + h(u_2). \end{aligned}$$
L'application h est donc bien linéaire.
2. On a
$$\begin{aligned} \ker(h) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x,y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = 0\} && \text{puisque } \alpha \neq 0 \\ &= \{(0,0)\}. \end{aligned}$$
3. Par le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(h) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ker(h)) = 2 - 0 = 2$. L'image $\mathrm{Im}(h)$ de h est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, lui aussi de dimension 2. On a donc $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$ (h est surjective).

Exercice 4. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On considère la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'application :

$$R_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)).$$

1. Montrer que R_θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que R_θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. On a, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$ et donc
$$\begin{aligned} R_\theta(\lambda u_1 + u_2) &= \big((\lambda x_1 + x_2)\cos\theta - (\lambda y_1 + y_2)\sin\theta, (\lambda x_1 + x_2)\sin\theta + (\lambda y_1 + y_2)\cos\theta\big) \\ &= \lambda\big(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, x_1\sin\theta + y_1\cos\theta\big) + \big(x_2\cos\theta - y_2\sin\theta, x_2\sin\theta + y_2\cos\theta\big) \\ &= \lambda R_\theta(x_1, y_1) + R_\theta(x_2, y_2) = \lambda R_\theta(u_1) + R_\theta(u_2). \end{aligned}$$
L'application R_θ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. On a
$$\begin{aligned} \ker(R_\theta) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \text{ et } x\sin\theta + y\cos\theta = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$
Par le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ker(R_\theta)) = 2 - 0 = 2$: $\mathrm{Im}(R_\theta)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, lui aussi de dimension 2. On a donc $\mathrm{Im}(R_\theta) = \mathbb{R}^2$ (R_θ est surjective). C'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. On considère l'application linéaire $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer l'image par f des vecteurs de la base canonique. En déduire le rang de f.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Correction. On utilise le fait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$.

1. On a
$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 0) \\ f(e_2) &= (1, 0) \\ f(e_3) &= (0, 1) \\ f(e_4) &= (0, 1). \end{aligned}$$
Puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$, le rang de f vaut 2.
2. Par le théorème du rang $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2$. Puisque $f(e_1) = f(e_2)$, on a $f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = 0$ et donc $e_1 - e_2 \in \ker(f)$. De même, $e_3 - e_4 \in \ker(f)$. Ainsi $e_1 - e_2$ et $e_3 - e_4$ sont deux éléments linéairement indépendant de $\ker(f)$; ce dernier étant un espace vectoriel de dimension 2, on en déduit $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_3 - e_4) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y, x + y)$.

1. Déterminer le noyau de f, puis l'image de f.
2. f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?

Correction.

1. On a

$$\begin{array}{rcl}\ker(f) & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f((x,y)) = 0_{\mathbb{R}^3})\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+y, x-y, x+y) = (0,0,0)\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0,\ x-y=0\} \\ & = & \{(0,0)\}\end{array}$$

   On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(1,0), f(0,1)) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1),(1,-1,1))$. Les vecteurs $(1,1,1),(1,-1,1)$ étant non colinéaires, ils forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Comme $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, on en déduit que f est injective.
3. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

Exercice 7. Soit $n\in\mathbb{N}$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $\varphi\colon E\to\mathbb{R}$ une application linéaire non nulle.

1. (a) Montrer qu'il existe $u\in E$ tel que $\varphi(u) = 1$.
   (b) En déduire que φ est surjective.
2. Quelle est la dimension de $\ker(\varphi)$?

Correction.

1. (a) Comme φ est non nulle, il existe $v\in E$ tel que $\varphi(v)\neq 0$. En posant $u = \frac{v}{\varphi(v)}$, on en déduit, par linéarité de φ, que $\varphi(u) = \frac{1}{\varphi(v)}\varphi(v) = 1$.
   (b) On utilise encore la linéarité de φ pour montrer que tout réel est dans l'image de φ. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, alors par la question précédente $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = \lambda$. Donc, φ est surjective. En particulier, $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$.
2. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = \dim E - \mathrm{rg}(\varphi) = n-1$.

Exercice 8. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application linéaire $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\longmapsto(6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y)$.

1. Déterminer un vecteur $a\in\mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. On pose $b = e_1+e_2$ et $c = e_2-e_3$.
   (a) Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   (b) En déduire que (b,c) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Correction.

1. On a

$$\begin{array}{rcl}\ker(f) & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 6x-4y-4z=0 \text{ et } 5x-3y-4z=0 \text{ et } x-y=0\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=2z\} \\ & = & \mathrm{Vect}((2,2,1)).\end{array}$$

   On a donc $\dim(\ker(f)) = 1$.

2. D'après le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(f) = 3-1 = 2$. Notons que $b = (1,1,0)$ et $f(b) = (2,2,0) = 2b$. Notons également que $c = (0,1,-1)$ et $f(c) = (0,1,-1) = c$. Les égalités $b = f(\frac{b}{2})$ et $c = f(c)$ montrent que $b,c\in\mathrm{Im}(f)$. Puisque b et c sont linéairement indépendants et que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, on en déduit que la famille (b,c) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, qui est quant à lui un espace vectoriel de dimension 3, il nous faut une équation pour décrire $\mathrm{Im}(f)$. Pour trouver cette équation, on écrit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}(b,c) \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ tels que } (x,y,z)=\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,-1)\} \\ & = & \{(\alpha,\alpha+\beta,-\beta) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \end{array}$$

   et donc $\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z) : x-z=y\}$ (en effet, l'égalité $\alpha-(-\beta)=\alpha+\beta$ montre que $\mathrm{Im}(f)\subset\{(x,y,z) : x-z=y\}$, et l'inclusion réciproque se déduit rapidement).

4. On a $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,1,-1)\big)$ et $\ker(f)=\mathrm{Vect}\big((2,2,1)\big)$. La famille $\big((1,1,0),(0,1,-1),(2,2,1)\big)$ est libre et donc elle forme une base pour $\mathbb{R}^3$. Donc $\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1)=e_2$, $f(e_2)=e_3$ et $f(e_3)=e_1$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ($f^3=f\circ f\circ f$).
3. Démontrer que $F=\{u\in\mathbb{R}^3 : f(u)=u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Correction.

1. L'application f est surjective puisque $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\right)=\mathrm{Vect}\left(e_1,e_2,e_3\right)=\mathbb{R}^3$ par définition de $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Comme f est un endomorphisme surjectif, c'est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. On sait qu'une application linéaire est totalement encodée par les images d'une base de l'espace de départ. Il suffit donc de montrer que l'égalité $f^3(x)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(x)$ est vraie pour les éléments de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} f^3(e_1)&=f^2(e_2)=f(e_3)=e_1=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(e_1)\\ f^3(e_2)&=f^2(e_3)=f(e_1)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(e_2)\\ f^3(e_3)&=f^2(e_1)=f(e_2)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(e_3)\end{aligned}$$

   On a donc bien l'égalité $f^3=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

3. Comme $f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$, d'où $0_{\mathbb{R}^3}\in F$. De plus, si $u,v\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u+v)&=\lambda f(u)+f(v) \text{ par linéarité de } f\\ &=\lambda u+v \text{ car } u,v\in F\end{aligned}$$

   Donc, $\lambda u+v\in F$ et on conclut que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3=(x,y,z)\in F$, alors $f(x,y,z)=(x,y,z)$ qui équivaut à $x=y=z$. Donc, $F=\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}=\mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$ et $\dim F=1$.

Exercice 10. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On considère l'application $u\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \longmapsto P + (1-X)P'$.

1. Montrer que u est bien définie puis que c'est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.
3. Quel est le rang de u ?
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Correction.

1. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg(P') \leq 1$ et $\deg((1-X)P') \leq 2$. On en déduit que $\deg(u(P)) \leq 2$. D'où $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathbb{R}_2[X]$ et u est bien définie.
   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a
   $$\begin{array}{rcl} u(\lambda P + Q) & = & \lambda P + Q + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ & = & \lambda P + Q + (1-X)(\lambda P' + Q') \\ & = & \lambda(P + (1-X)P') + Q + (1-X)Q' \\ & = & \lambda u(P) + u(Q). \end{array}$$
   L'application u est donc bien linéaire.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \ker(u)$, alors
   $$\begin{array}{rcl} u(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} & \Leftrightarrow & P + (1-X)P' = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Leftrightarrow & (aX^2 + bX + c) + (1-X)(2aX + b) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Leftrightarrow & aX^2 + bX + c + 2aX + b - 2aX^2 - bX = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Leftrightarrow & -aX^2 + 2aX + b + c = 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{array}$$
   Un polynôme étant nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, la dernière équation équivaut à
   $$\begin{cases} -a & = 0 \\ 2a & = 0 \\ b + c & = 0 \end{cases}$$
   qui équivaut à
   $$\begin{cases} a & = 0 \\ b & = -c \end{cases}$$
   Donc, $\ker(u) = \{bX - b : b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((X-1))$.
3. Par la question précédente, on a $\dim(\ker(u)) = 1$. On déduit du théorème du rang que $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2$.
4. On a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, 1, 2X - X^2) = \mathrm{Vect}(1, 2X - X^2)$. Puisque les polynômes 1 et $2X - X^2$ sont linéairement indépendants, la famille $(1, 2X - X^2)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension n et $u\colon E \to E$ un endomorphisme.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$;

(ii) Pour tout $x \in E$, $u^2(x) = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(u)$.

Remarque : $u^2 = u \circ u$.

Correction.

$(i) \Rightarrow (ii)$ **:** Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$. Dans ce cas, pour tout $x \in E$, $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E)$ car $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \ker(u)$. On conclut donc que $u^2(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

La deuxième affirmation découle du théorème du rang, $n = \dim E = \dim \ker(u) + \mathrm{rg}(u) = 2\,\mathrm{rg}(u)$ puisque $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ **:** On va d'abord montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \ker(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$. Puisqu'on suppose que $u^2(x) = 0$, on a $u(u(x)) = 0$ et donc $y = u(x) \in \ker(u)$. Ce qui montre bien l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subseteq \ker(u)$.

De plus, par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = 2\,\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u)$. On a montré que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \ker(u)$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u) = \dim(\ker(u))$. On a donc $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel de dimension n. On appelle projecteur de E toute application linéaire $p\colon E \to E$ telle que $p^2 = p$. Soit p un projecteur de E.

1. Montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires.
2. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.
3. Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.
4. On considère $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto \left(\frac{y}{2}, y\right)$.
   (a) Montrer que f est un projecteur.
   (b) Déterminer l'image de f.
   (c) Déterminer l'image de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f$.

Correction.

1. Soit $y \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $p(y) = 0_E$. Comme $p^2 = p$, on en déduit que $y = p(x) = p^2(x) = p(y) = 0_E$. Alors $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \{0_E\}$. Finalement, $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$, l'autre inclusion étant directe. Ce qui montre que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe.

   Il reste à montrer que $E = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$. Comme $\ker(p) + \mathrm{Im}(p) \subset E$ par construction, il suffit de montrer que $E \subset \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$. Soit $x \in E$ et décomposons le comme somme d'un élément de $\ker(p)$ et un élément de $\mathrm{Im}(p)$ en écrivant $x = p(x) + x - p(x)$. On a bien $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \ker(p)$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E$ en utilisant $p^2 = p$. Donc, $E = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$.

   Finalement, $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont bien supplémentaires dans E.

2. En utilisant $p^2 = p$, on a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_E - p)^2 &= (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) \\
&= \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E - p \circ \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E \circ p + p \circ p \\
&= \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 \\
&= \mathrm{Id}_E - p \qquad\qquad \text{car } p^2 = p.
\end{aligned}$$

   Notons par ailleurs que $\mathrm{Id}_E - p$ est une application linéaire comme somme d'applications linéaires. Donc, $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.

3. On procède par double inclusions.

($\subseteq$) $\ker(\mathrm{Id}_E - p) \subseteq \mathrm{Im}(p)$. Soit $x \in \ker(\mathrm{Id}_E - p)$, alors $x - p(x) = (\mathrm{Id}_E - p)(x) = 0$ donc $x = p(x)$ et $x \in \mathrm{Im}(p)$.

($\supseteq$) $\mathrm{Im}(p) \subseteq \ker(\mathrm{Id}_E - p)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. En appliquant p à cette équation, on obtient $p(y) = p(p(x))$. Puisque $p^2 = p$, on a $p(y) = p(x)$. Ainsi on a $(\mathrm{Id}_E - p)(y) = y - p(y) = p(x) - p(x) = 0$ et donc $y \in \ker(\mathrm{Id}_E - p)$.

4. (i) On a $f^2(x, y) = f(\frac{y}{2}, y) = (\frac{y}{2}, y) = f(x, y)$ et donc $f^2 = f$. Ainsi, f est une projection.
   (ii) Par la question 3 on a $\mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f)$. De plus, $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{y}{2}, 0) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{y}{2}\}$. Alors, f est une projection sur la droite $y = 2x$.
   (iii) Notons que $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f)(x, y) = (x - \frac{y}{2}, 0) = \mathrm{Vect}((1, 0))$. Ainsi, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f$ est une projection sur la droite définie par $y = 0$.

   Conclusion : $\ker(\mathrm{Id}_E - f) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v, c'est-à-dire que $v(\ker(u)) \subset \ker(u)$ et $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Correction.

Première inclusion : soit $y \in v(\ker(u))$, il existe alors $x \in \ker(u)$ tel que $y = v(x)$. Dans ce cas, en utilisant $u \circ v = v \circ u$, on a $u(y) = u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$ car $u(x) = 0_E$. D'où la première inclusion $v(\ker(u)) \subset \ker(u)$.

Deuxième inclusion : soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Dans ce cas, $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$ car $u \circ v = v \circ u$. Ce qui montre bien $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $u \colon E \to E$ un endomorphisme et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On note $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

1. Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour tout $x \in E_\lambda$, calculer $u(x)$ en fonction de λ et x.
3. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Supposons que $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Correction.

1. Le noyau d'une application linaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc, E_λ est bien un sous-espace vectoriel de E puisque $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est linéaire.
2. Pour tout $x \in E_\lambda$, $u(x) - \lambda x = 0_E$, soit donc $u(x) = \lambda x$.
3. On note d'abord que par définition de u, on a $u(F) \subseteq E$ et que $0_E \in u(F)$ car $0_E = u(0_E)$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in u(F)$. Il existe $x_1, x_2 \in F$ tels que $u(x_1) = y_1$ et $u(x_2) = y_2$. Notons que $\lambda x_1 + x_2 \in F$ car F est un sous-espace vectoriel. Puisque u est une application linéaire, on $\lambda y_1 + y_2 = \lambda u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda x_1 + x_2)$ et donc $\lambda y_1 + y_2 \in u(F)$.
4. Soit $\lambda \neq 0$. On va montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$ par double inclusion.
   ($\subseteq$) Soit $y \in u(E_\lambda)$. Il existe donc $x \in E_\lambda$ tel que $u(x) = y$. Or, d'après la question 1, $u(x) = \lambda x$, d'où $y = \lambda x$. Puisque E_λ est un sous-espace vectoriel et puisque $x \in E_\lambda$, on a $y = \lambda x \in E_\lambda$. D'où $u(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.
   ($\supseteq$) Soit $x \in E_\lambda$. D'après la question 1, on a $u(x) = \lambda x$. Puisque u est une application linéaire (et $\lambda \neq 0$), on a $u(\frac{1}{\lambda} x) = x$. De plus, puisque E_λ est un sous-espace vectoriel et $x \in E_\lambda$, on a $\frac{1}{\lambda} x \in E_\lambda$ et donc $x = u(\frac{1}{\lambda} x) \in u(E_\lambda)$. D'où $E_\lambda \subseteq u(E_\lambda)$.

Exercice 15.

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ celui des fonctions de classe C^1.

On considère l'application $\phi \colon E \to F$ définie par, pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que ϕ est bien définie puis que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \{g \in F : g(0) = 0\}$.
4. On considère l'application linéaire $\psi \colon F \to E,\ f \longmapsto f'$.
   Calculer $\psi \circ \phi$ et $\phi \circ \psi$.

Correction.

1. Tout élément f de F est en particulier continue donc Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc, ϕ est bien définie.

   Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$\phi(\lambda f + g)(x) = \int_0^x (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\phi(f) + \phi(g).$$

   L'application ϕ est donc bien linéaire.
2. Si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dans le noyau de ϕ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\phi(f)(x) = 0$. La fonction $\phi(f)$ est donc dérivable de dérivée nulle. Puisque $\phi(f)$ est une primitive de f, on en déduit que $f = 0$ et que $\ker(\phi)$ est le singleton constitué de la fonction nulle.
3. Notons que, pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(f)(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$: $\phi(f)$ est donc une fonction continument dérivable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle en 0. Réciproquement, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continument dérivable s'annulant en 0 alors elle est dans l'image de ϕ puisque $g = \phi(g')$ (théorème fondamental de l'analyse). L'image de ϕ est donc l'ensemble des fonctions continument dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annulant en 0.
4. Soit $f \in F$, alors

   $$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)(f) &= \psi\left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= f\end{aligned}$$

   Donc, $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_F$. Et

   $$\begin{aligned}(\phi \circ \psi)(f) &= x \mapsto \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= x \mapsto f(x) - f(0)\end{aligned}$$