Devoir n°4

Exercice 1 On fixe a et b deux nombres réels distincts. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (b-a)P'\left(\frac{a+b}{2}\right) - P(b) + P(a)\,.$$

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifiez votre réponse par une démonstration rigoureuse.
2. Calculer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Sans aucun calcul supplémentaire, en déduire la relation suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]\,, \quad (b-a)P'\left(\frac{a+b}{2}\right) = P(b) - P(a)\,.$$

Correction de l'exercice 1
1. C'est effectivement du cours mais, l'énoncé demandant une démonstration, écrivons un argument. On a tout d'abord $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$: la famille $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$ est donc génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ revient donc à montrer que $\mathcal{F}$ est libre : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a + bX + cX^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\,.$$

En dérivant deux fois cette identité polynômiale, on obtient que $c = 0_{\mathbb{R}}$, d'où $a+bX = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. En dérivant une fois cette nouvelle identité polynômiale, on obtient que $b = 0_{\mathbb{R}}$, d'où on a finalement aussi $a = 0_{\mathbb{R}}$. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ admettant une base à 3 vecteurs, il est de dimension finie égale à 3.

Quelques commentaires : ce genre de question a un côté un peu artificiel, puisque la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ ont été introduits tôt dans les cours sur ces sujets. Sauf si on vous le demande explicitement (comme ici, et il faut alors jouer le jeu et vraiment *montrer* quelque chose), c'est une propriété du cours que vous pouvez utiliser sans démonstration. Voici quelques points relevés dans les copies

— Ne parlez pas de la *dimension* d'une famille de vecteurs : vous pouvez parler de son nombre de vecteurs ou de son rang (attention, deux notions distinctes parfois aussi confondues). On peut en revanche bien parler de la dimension d'un espace vectoriel.
— Bon nombre de copies ont ici un recours fantaisiste à des matrices à coefficients polynômiaux. D'une façon générale, il est bon de rester élémentaire, i.e. de n'utiliser guère plus que les définitions des objets considérés, quand on vous demande de démontrer une propriété élémentaire. Sinon, vous risquez d'utiliser une propriété qui s'appuie sur celle que vous voulez démontrer. D'une manière générale, utiliser les matrices pour résoudre cette question n'a pas vraiment de sens.
— Bon nombre de copies écrivent que $(1, X, X^2)$ est égale à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Attention à ne pas écrire des égalités entre objets qui ne sont pas de la même nature (vecteurs de polynômes et $\mathbb{R}^3$ ici).

2. On vérifie aisément que $f(1_{\mathbb{R}_2[X]}) = f(X) = f(X^2) = 0_{\mathbb{R}}$.

Quelques commentaires : seulement quelques problèmes de notation, éviter d'appeler $e_1 = 1$, $e_2 = X$ et $e_3 = X^2$. La notation initiale $1, X, X^2$ semble plus transparente. Certaines copies abusent aussi de la notation "$\to$" pour dire tout et n'importe quoi.

3. Montrer l'identité demandée revient à montrer que f est la fonction nulle. Montrons que f est linéaire :
— D'abord, f est une application bien définie entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
— Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (b-a)(P+\lambda Q)'\left(\frac{a+b}{2}\right) - (P+\lambda Q)(b) + (P+\lambda Q)(a) \\ &= (b-a)P'\left(\frac{a+b}{2}\right) - P(b) + P(a) + \lambda\left[(b-a)Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) - Q(b) + Q(a)\right] \\ &= f(P) + \lambda f(Q)\,, \end{aligned}$$

utilisant simplement la définition de "+" sur $\mathbb{R}_2[X]$ et la linéarité de la dérivation

D'où f est bien linéaire ; ainsi, pour montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_2[X]$, *il suffit de montrer qu'elle s'annule sur les vecteurs d'une base de* $\mathbb{R}_2[X]$. Cette dernière propriété est vraie par la question 2, ce qui conclut.

Quelques commentaires :

— Ne pas oublier de dire (ou mieux, de vérifier) que f est *linéaire* pour conclure à partir de la question 2 que f est l'application nulle.

— Même chose pour les copies qui calculent la matrice de f avant de dire que c'est une application *linéaire* : cela n'a pas de sens pour une application quelconque.

— Quelques réponses fausses/fantaisistes pour les copies qui n'ont pas vu de lien avec les questions précédentes : on peut effectivement démontrer cette identité directement (même si ce n'est pas l'esprit de l'exercice), mais il faut alors faire le calcul proprement...

Exercice 2

1. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(f)\,. \tag{1}$$
2. On suppose dorénavant que f est l'application donnée par
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + y + 7z \\ x + 3y + z \\ -x - y + z \end{pmatrix}.$$
   (a) Vérifier que f est bien une application linéaire.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ (resp. $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$) est une droite vectorielle et en donner une base (ε_1) (resp. (ε_2), (ε_3)).
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. L'inclusion (1) est-elle nécessairement vraie pour $\lambda = 0$?
   (d) Donner la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Correction de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, c'est à dire tel que $f(x) - \lambda x = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme $\lambda \neq 0$, on peut alors écrire
$$x = \frac{1}{\lambda} \times f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathrm{Im}(f)\,,$$
la seconde égalité découlant de la linéarité de f, ce qui conclut.

2.a Soient
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
On peut alors écrire
$$\begin{aligned} f(X + \lambda X') = f\begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ y + \lambda y' \\ z + \lambda z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + 7(z + \lambda z') \\ (x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') + (z + \lambda z') \\ -(x + \lambda x') - (y + \lambda y') + (z + \lambda z') \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -3x + y + 7z \\ x + 3y + z \\ -x - y + z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3x' + y' + 7z' \\ x' + 3y' + z' \\ -x' - y' + z' \end{pmatrix} = f(X) + \lambda f(X')\,, \end{aligned}$$
d'où f est bien un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2.b On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \iff f(X)+X = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -2x + \ y + 7z = 0 \\ \quad x + 4y + \ z = 0 \\ -x - \ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \quad x + 4y + \ z = 0 \\ -2x + \ y + 7z = 0 \\ -x - \ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 4y + \ z = 0 \\ \quad 9y + 9z = 0 \\ \quad 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y = -z \\ \quad y = -z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)\,,$$

où $\varepsilon_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ceci montre que la famille (ε_1) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$. De plus cette famille n'étant constituée que d'un vecteur *non nul*, elle est libre et c'est donc bien une base de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$.
De même, on vérifie qu'on peut prendre (par exemple, ou bien tout vecteur proportionnel non nul)

$$\varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.c Puisque ce sera utile aussi dans la question suivante, montrons au passage que $\mathcal{B} := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme c'est une famille à trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre. Soit donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \tag{E}$$

— Solution 1 (sans calculs) : appliquant $f \circ (f - 2\mathrm{Id}) = (f - 2\mathrm{Id}) \circ f = f^2 - 2f$ à l'identité (E) et la définition des ε_i, on obtient

$$\begin{aligned} &f \circ (f - 2\mathrm{Id})(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) \\ &= xf\Big(\underbrace{(f-2\mathrm{Id})(\varepsilon_1)}_{=-3\varepsilon_1}\Big) + y(f-2\mathrm{Id})\Big(\underbrace{f(\varepsilon_2)}_{=0}\Big) + zf\Big(\underbrace{(f-2\mathrm{Id})(\varepsilon_3)}_{=0}\Big) = 3x\varepsilon_1 = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}\,, \end{aligned}$$

d'où $x = 0$ car $\varepsilon_1 \neq 0$. De même, en appliquant $(f + \mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})$ (resp. $f \circ (f - 2\mathrm{Id})$) à l'identité (E), on obtient $y = 0$ (resp. $z = 0$).

— Solution 2 (plus élémentaire) : on a

$$(\mathrm{E}) \iff \begin{cases} 3x + 2y + \ z = 0 \\ -x - \ y - 2z = 0 \\ \ x + \ y + \ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ x + \ y + \ z = 0 \\ 3x + 2y + \ z = 0 \\ -x - \ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + \ z = 0 \\ \qquad - \ z = 0 \\ \ - y - 2z = 0 \end{cases} \iff z = 0 = y = x\,.$$

D'où $\mathcal{B}$ est bien une famille libre, puis une base de $\mathbb{R}^3$.
La famille $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a bien $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2) \oplus \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \mathbb{R}^3$. Par définition de ε_2, la question revient donc à montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)\,. \tag{$\star$}$$

Or, par la question 1, on a que ε_1 et ε_3 sont dans $\mathrm{Im}(f)$. Ce dernier ensemble étant un espace vectoriel, on a que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \subset \mathrm{Im}(f)$. Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 2$: par inclusion et égalité des dimensions, on a bien $(\star)$, ce qui conclut la preuve de $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Remarque : comme fait dans certaines copies, on peut aussi résoudre cette question sans utiliser ce qui précède, en extrayant une base (a_1, a_2) de $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3))$, puis en montrant "à la main" (via un système) que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2) \oplus \mathrm{Vect}(a_1, a_2) = \mathbb{R}^3$, puisque $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2) = \mathrm{Ker}(f)$.

L'inclusion (1) est fausse en général pour $\lambda = 0$: dans le cas présent, on a que $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ mais que $\varepsilon_2 \notin \mathrm{Im}(f)$, car $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (i.e. $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$) avec $\varepsilon_2 \neq 0$.

2.d Comme vérifié dans la question précédente, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

— Solution 1 : par définition de ε_1 en **2.b**, on a $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$, ce qui permet de remplir la colonne de M. De même, en utilisant aussi que $f(\varepsilon_2) = 0$ et $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$, on conclut que

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— Solution 2 (plus maladroite ici) : on peut aussi écrire

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. On peut alors calculer

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

de sorte qu'on peut retrouver

$$M = P^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de } f \text{ dans la base can.}} P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelques commentaires :

— Beaucoup de très bon travail dans cet exercice.

— **Une erreur grave** : certaines copies remplissent la première colonne de M avec les coordonnées de $f(\varepsilon_1)$ *dans la base canonique* (au lieu des coordonnées de ce vecteur dans $\mathcal{B}$). Essayez alors de comprendre une bonne fois pour toute, notamment en préparation de l'an prochain, pourquoi c'est faux (on vous a par ailleurs certainement déjà mis en garde sur ce point en TD).

— J'ai vu dans certaines (par ailleurs très bonnes) copies que

$$f = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

confondant ainsi l'application linéaire f et sa matrice dans la base canonique. Même si c'est parfois tentant, encore une fois, n'écrivez pas des égalités entre des objets qui ne sont pas de même nature (ici une application linéaire f et sa matrice).

— Bien spécifier que $\lambda \neq 0$ avant de diviser par λ.

— Certaines copies ont fait le lien avec la propriété du cours

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

C'est une bonne remarque, même si ce n'était pas vraiment dans l'esprit de l'énoncé et que cela a pu mener à des arguments un peu longs.

Exercice 3

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{2X^3+1}{X^4-X^3-X+1}$.
2. Déterminer toutes les primitives de la fonction $t \mapsto \frac{2t^3+1}{t^4-t^3-t+1}$ sur son ensemble de définition.

Correction de l'exercice 3

1. Posons

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}, \quad \text{avec } P(X) = 2X^3 + 1 \text{ et } Q(X) = X^4 - X^3 - X + 1.$$

Factorisation de Q : remarquons d'abord que 1 est racine "évidente" de Q. D'où $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne, on obtient $Q_1(X) = X^3 - 1$, dont 1 est aussi racine. De même, on trouve $Q_1(X) = (X-1)(X^2+X+1)$. Au bilan, on obtient $Q(X) = (X-1)^2(X^2+X+1)$, où X^2+X+1 n'a pas de racine réelle.
Par le théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, comme $\deg(P) < \deg(Q)$, il existe des nombres réels a, b, c, d uniques (autant que le degré de Q) tels que

$$F(X) = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}\,. \tag{D}$$

Posant

$$F_1(X) = (X-1)^2F(X) = \frac{2X^3+1}{X^2+X+1} \in \mathbb{R}(X)$$

sans pôle en 1, on a $F_1(1) = \boxed{a=1}$. On identifie aussi dans (D) que $F_1'(1) = \boxed{b=1}$, utilisant

$$F_1'(X) = \frac{2X^4+4X^3+6X^2-2X-1}{(X^2+X+1)^2}\,.$$

Une possibilité (naïve) pour déterminer c et d est d'évaluer :

$$F(0) = 1 = a - b + d = d\,,\ \text{d'où } \boxed{d=1}\,,$$

$$F(-1) = -\frac{1}{4} = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + (-c+d) = \frac{3}{4} - c\,,\ \text{d'où } \boxed{c=1}\,.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t+1}{t^2+t+1}dt &= \int_0^x \left[\frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1/2}{t^2+t+1}\right] dt\,,\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,,\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{3}\int_0^x \frac{dt}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,,\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{u^2+1}\left(\frac{\sqrt{3}\,du}{2}\right)\,,\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_{1/\sqrt{3}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}\,.
\end{aligned}$$

La bonne définition de l'intégrale et la deuxième égalité (utilisation du ln) utilisent que $x \mapsto x^2+x+1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et que la fonction continue $x \mapsto x \mapsto 1/(x^2+x+1)$ est donc Riemann intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. La quatrième égalité utilise le changement de variable $t \mapsto u(t) := \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Avec les notations de la question précédente, la fonction $f : x \mapsto F(x)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. On en déduit alors, utilisant aussi la question 1, que la fonction

$$g : x \mapsto -\frac{1}{x-1} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Les seules fonctions fonctions de dérivée nulle étant les fonctions constantes sur tout sous-*intervalle*, l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ est donc

$$\left\{ g_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) + \left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ si } x < 1\,, \\ \beta \text{ si } x > 1\,, \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \text{tels que } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Quelques commentaires :

— Ne pas oublier la valeur absolue dans $\ln|x-1|$ dans la question 2, pour $x<1$.
— Ne pas oublier qu'il y a **"autant de constantes que d'intervalles"** : cela provient du fait que la différence de deux solutions est une fonction de dérivée nulle. Or, une fonction de dérivée nulle sur une union disjointe d'intervalles ouverts est déterminée par une constante *sur chaque sous-intervalle*.
Exemple type à garder en tête : la fonctions $x \mapsto x/|x|$ est bien de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^\star$, mais pas constante sur $\mathbb{R}^\star$ (valant $+1$ sur $]0,+\infty[$ et -1 sur $]-\infty,0[$).
— Avant d'intégrer une fonction, toujours se demander (même s'il n'est pas toujours nécessaire de l'écrire) si la fonction est Riemann intégrable : la question est particulièrement pertinente quand on intègre des fractions rationnelles comme ici. Typiquement, *cela n'a pas* vraiment *de sens* d'intégrer f sur un segment contenant 1 dans cet exercice 3.

Exercice 4 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue fixée.

1. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}.$$
2. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(x)\,dx\,.$$
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, tout $k\in\{0,...,n-1\}$ et tout $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, on a
$$\left|(1-x)^2-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right|\le\frac{2}{n}.$$
   (b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.
3. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue fixée.
   (a) On suppose que g est de classe C^1.
      i. Montrer qu'il existe une constante $M>0$ telle que
$$\forall(x,y)\in[0,1]^2,\quad |g(x)-g(y)|\le M|x-y|\,.$$
      ii. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)f(x)dx \qquad (\star)$$
   (b) (Bonus) Montrer que $(\star)$ est toujours vraie (même sans l'hypothèse supplémentaire de la question précédente que g est de classe C^1).

Correction de l'exercice 4
1. La fonction $F:x\mapsto(1-x)^2f(x)$ est continue sur $[0,1]$, comme produite de fonctions continues. On peut donc appliquer le théorème de convergence des sommes de Riemann (appelé parfois plus spécifiquement sous cette forme "formule des rectangles à gauche") sur le *segment* $[0,1]$:
$$\int_0^1 F(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}.$$
On a écrit simplement que
$$F\left(\frac{k}{n}\right)=\left(1-\frac{k}{n}\right)^2f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\,(n-k)^2\,\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n},$$

puis on a factorisé ("fait sortir la somme") la somme par $1/n$ indépendant de k (la dépendance en n n'est pas gênante).

2.a On écrit

$$(1-x)^2 - \left(1-\frac{k}{n}\right)^2 = \left[(1-x) - \left(1-\frac{k}{n}\right)\right]\left[(1-x) + \left(1-\frac{k}{n}\right)\right],$$

d'où, prenant les valeurs absolues, on a

$$\left|(1-x)^2 - \left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right| = \left|x-\frac{k}{n}\right|\left|2-\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|,$$

ce qui conclut en utilisant

$$0 \leq \left|x-\frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq \left|2-\underbrace{\left(x+\frac{k}{n}\right)}_{0\leq\quad\leq 2}\right| \leq 2\,.$$

car $k \in \{0,...,n-1\}$ et $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

2.b On va montrer que la limite est $l := \int_0^1 (1-x)^2 f(x)dx$. La stratégie (très utilisée dans ce contexte) est alors d'estimer $S_n - l$. Utilisons tout d'abord la relation de Chasles sur les intégrales pour écrire

$$S_n - l = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 - (1-x)^2\right] f(x)dx\,.$$

Prenant alors les valeurs absolues, on a

$$0 \leq |S_n - l| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 - (1-x)^2\right| |f(x)|dx \leq \frac{2}{n}\int_0^1 |f(x)|dx\,,$$

La première inégalité utilise l'inégalité triangulaire et la propriété $|\int\cdot| \leq \int|\cdot|$. La seconde utilise la question 2.a et la relation de Chasles. Le membre de droite tendant vers 0 quand $n \to +\infty$, on conclut par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et vaut l.

3.a.i Soit $(x,y) \in [0,1]^2$. La propriété est claire pour $x = y$. On suppose donc sans perte de généralité que $x < y$. La fonction g étant de classe C^1 sur $[0,1]$, g est en particulier dérivable sur $]x,y[$, continue sur $[x,y]$, de sorte que le théorème des accroissements fini affirme qu'il existe $c_{x,y} \in]x,y[$ tel que

$$g(x) - g(y) = g'(c_{x,y})(x-y)\,. \tag{TAF}$$

Indépendamment, par le théorème des bornes, la fonction g' étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée au sens où il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $c \in [0,1]$, $|g'(c)| \leq M$. D'où par (TAF), on obtient

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c_{x,y})||x-y| \leq M|x-y|\,,$$

ce qui conclut aussi pour $x \neq y$.

3.a.ii On va suivre à nouveau la stratégie de **2.b**. Par la relation de Chasles, on a

$$\varepsilon_n := \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\ dx - \int_0^1 g(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right] f(x)dx\,.$$

Prenant alors les valeurs absolues, on a

$$0 \leq |\varepsilon_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right| |f(x)|dx \leq \frac{M}{n}\int_0^1 |f(x)|dx\,;$$

seul changement maintenant, on utilise **3.a.i** pour écrire pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$:

$$\left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right| \leq M\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \frac{M}{n}.$$

Comme en **2.b**, ceci conclut la preuve de $(\star)$.

3.b Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est maintenant supposée continue sur le segment $[0, 1]$, elle est uniformément continue sur $[0, 1]$ (théorème de Heine). En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$|x - y| \leq \frac{1}{n_0} \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

D'où, pour tout $n \geq n_0$, on obtient que pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$\left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right| \leq \varepsilon,$$

de sorte que, avec les notations de **3.a.ii**, on a

$$0 \leq |\varepsilon_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right| |f(x)| dx \leq \varepsilon \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci montre exactement $(\star)$.

Quelques commentaires :

— Procéder par encadrement pour montrer que la limite existe : si vous avez écrit le symbole lim avant de montrer qu'un limite existe, ce n'est pas correct (erreur plus fréquente dans les questions 3 et 4, du fait que ces questions ne sont pas formulées exactement comme la question 2).

— Ne pas oublier que la somme vous fait perdre un facteur n. Par exemple, j'ai souvent vu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{M}{n^2} = \frac{M}{n^2} \text{ au lieu de } \frac{M}{n} \quad (\text{NB : le terme sommé est indépendant de } k).$$

— Dans la question 2.a, certains arguments très approximatifs, notamment pour les copies qui préfèrent utiliser des doubles inégalités à des valeurs absolues : pour écrire $x \leq y \implies ax \leq ay$, il faut bien sûr vérifier $a \geq 0$.

— Des erreurs dans la question 3.a.i : votre rédaction doit exprimer sans ambiguïté que M est indépendant de x, y (sinon, la propriété est évidemment vraie, mais inutile).

— Attention à ne pas écrire (même si c'est tentant)

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq M$$

en **3.a.i** sans exclure $x = y$ (c'est le désavantage de cette formulation sous forme de quotient par rapport à celle de l'énoncé).

— Toujours sur la même question, j'ai vu souvent l'enchainement suivant :"g est dérivable sur $]0, 1[$, donc il existe une constante $M > 0$ tel que $|g'| \leq M$ sur $[0, 1]$". Ceci est faux au sens où il faut bien supposer que g' est continue sur le segment $[0, 1]$ (comme ici) pour avoir cette borne. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ mais sa dérivée n'est pas bornée...

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soient

$$\mathcal{C} = \left\{v \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; v \circ u = u \circ v\right\}$$

et

$$\mathcal{P} = \left\{a_0 \mathrm{Id} + a_1 u + ... + a_{n-1} u^{n-1} \;\middle|\; (a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

On rappelle que, pour $v \in \mathcal{L}(E)$, v^2 est une notation pour désigner $v \circ v$, v^3 pour $v \circ v \circ v$ etc.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.
3. Soit $e \in E$. On note alors $e_0 = e$, $e_1 = u(e)$,..., $e_{n-1} = u^{n-1}(e)$ et on suppose que $(e_0, e_1, ..., e_{n-1})$ est une base de E.
   (a) Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{C}$.
   Indication pour montrer $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$: si $v \in \mathcal{C}$, on pourra d'abord montrer qu'il existe un unique n-uplet $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(e) = a_0 e_0 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1}$.
   (b) Donner la dimension de $\mathcal{C}$.

Correction de l'exercice 5

1. On a bien que $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{C}$: $0_{\mathcal{L}(E)} \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Si maintenant v et v' sont dans $\mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on écrit

$$(v + \lambda v') \circ u = v \circ u + \lambda v' \circ u = u \circ v + \lambda u \circ v' = u \circ (v + \lambda v')\,.$$

La première égalité utilise seulement les lois internes ("+") et externes sur $\mathcal{L}(E)$, la seconde égalité utilise que v et v' sont dans $\mathcal{C}$ et la troisième égalité utilise (contrairement à la première!) la linéarité, de u en l'occurrence. D'où $\mathcal{C}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2 Il est clair que $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, ..., u^{n-1})$. Comme $\mathcal{C}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Id}, ..., u^{n-1}$ sont dans $\mathcal{C}$. Or c'est bien le cas car, si $k \in \{0, ..., n-1\}$, on a $u^k \circ u = u \circ u^k = u^{k+1}$ par associativité de "$\circ$" (qui est d'ailleurs déjà utilisée pour définir la notation u^k).

3.a On a déjà montré $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ en **2**. Montrons maintenant $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$. Soit $v \in \mathcal{C}$. Comme $(e_0, ..., e_{n-1})$ est en particulier génératrice de E, il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(e_0) = a_0 e_0 + ... + a_{n-1}e_{n-1}$. On peut alors définir $v' = a_0\mathrm{Id} + ... + a_{n-1}u^{n-1} \in \mathcal{P}$ et il suffit donc de démontrer que $v = v'$. Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, on calcule alors

$$v(e_k) = v \circ u^k(e_0) = u^k \circ v(e_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{k+j}(e_j)\,,$$

la première égalité utilise la définition de e_k, la seconde utilise que $v \in \mathcal{C}$ via

$$v \circ u^k = (v \circ u)u^{k-1} = (u \circ v)u^{k-1} = ... = u^k \circ v$$

et la dernière utilise la définition des a_j ; indépendamment, on a

$$v'(e_k) = \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j\right)}_{\in \mathcal{L}(E)} \underbrace{(u^k(e_0))}_{\in E} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{j+k}(e_j)\,.$$

Les deux applications *linéaires* v et v' coïncidant sur la base $(e_0, ..., e_{n-1})$ de E, elles sont égales et on a bien $v' = v \in \mathcal{P}$.

3.b Par **3.a**, on cherche la dimension de $\mathcal{P}$. Comme la famille $(\mathrm{Id}, ..., u^{n-1})$ est génératrice dans $\mathcal{P}$, il suffit de montrer que cette famille est libre dans $\mathcal{L}(E)$ pour avoir que $\dim(\mathcal{P}) = \boxed{\dim(\mathcal{C}) = n}$. Soit donc $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $a_0\mathrm{Id} + ... + a_{n-1}u^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Appliquant cette égalité entre applications linéaires de $\mathcal{L}(E)$ à $e = e_0 \in E$, on obtient que $a_0 e_0 + ... + a_n e_{n-1} = 0_E$ et comme on a supposé que $(e_0, ..., e_{n-1})$ est une famille libre de E, on a bien $a_0 = ... = a_{n-1} = 0_{\mathbb{K}}$, ce qui conclut.

Quelques commentaires :

— Quand on vous demande de faire une vérification comme dans les premières questions, ne "bavardez" pas sur votre copie (j'ai vu des demi-pages de texte *vague* sans aucune vraie formule...) mais effectuez très rigoureusement (quantificateurs, ensembles etc.) les vérifications demandées.

— Quelques rédactions maladroites de la question 2 : *par linéarité* (on sais déjà que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel par la question 1), il suffit de vérifier la condition de $\mathcal{C}$ sur les éléments de la famille $(\mathrm{Id}, ..., u^{n-1})$ naturellement génératrice de $\mathcal{P}$.

- Attention à la confusion ($\star$) fréquente entre $v(e) = a_0 e_0 + ... + a_n e_{n-1}$, vecteur de E, et $v = a_0 \mathrm{Id} + ... + a_{n-1} u^{n-1}$, élément de $\mathcal{L}(E)$: cela enlève tout sens à votre raisonnement.
- Question 3.b fausse dans la plupart des copies (la fatigue sans doute) : il ne suffit pas de dire qu'il y a une famille génératrice à n-vecteurs dans $\mathcal{P}$ pour dire que $\mathcal{P} = \mathcal{C}$ est de dimension n. Il fait de plus montrer que cette famille est bien une base, i.e. qu'elle de plus libre. La confusion ($\star$) désastreuse ici aussi.
- Quelques (rares) copies me parlent d'espaces propres dans cet exercice : c'est ici un peu hors sujet. Assurez vraiment les bases avant d'anticiper sur le programme de l'an prochain.