
Corrigé du devoir surveillé 2

Exercice 1 f est donnée par

$$f(x) = \frac{x(\pi - x)(\pi + x)}{\sin x}, \qquad \text{pour } x \in]0, \pi[.$$

1. Lorsque $x \to 0$, on a les équivalents simples suivants : $x \sim x$, $\pi - x \sim \pi$, $\pi + x \sim \pi$ et $\sin x \sim x$. Donc,
$$f(x) \sim \frac{x\,\pi^2}{x} = \pi^2, \qquad \text{lorsque } x \to 0^+.$$
2. Autrement dit, la limite
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \pi^2$$
existe et donc f se prolonge par continuité en 0.
3. Pour $x \in]0, \pi[$, posons $x = \pi - \alpha$, de sorte que $\alpha \to 0^+$ si et seulement si $x \to \pi^-$. Alors,
$$f(x) = \frac{(\pi - \alpha)\alpha(2\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{(\pi - \alpha)\alpha(2\pi - \alpha)}{\sin(\alpha)}.$$
Lorsque $\alpha \to 0$, $\pi - \alpha \sim \pi$, $\alpha \sim \alpha$, $2\pi - \alpha \sim 2\pi$ et $\sin(\alpha) \sim \alpha$. On en déduit que
$$f(x) \sim 2\pi^2, \qquad \text{lorsque } x \to \pi^-$$
et donc f est prolongeable par continuité en π.
4. Dans l'expression de f, le numérateur s'écrit
$$x(\pi - x)(\pi + x) = x(\pi^2 - x^2) = \pi^2 x - x^3 \sim \pi^2 x \quad \text{lorsque } x \to 0.$$
Pour obtenir un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 4 en 0, il nous faut donc développer la fonction sin à l'ordre 5. La formule de cours donne
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \qquad \text{lorsque } x \to 0.$$
D'où,
$$f(x) = \frac{\pi^2 x - x^3}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}, \qquad \text{lorsque } x \to 0^+.$$
En factorisant par le terme dominant au numérateur et au dénominateur, on trouve
$$f(x) = \frac{\pi^2 - x^2}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = (\pi^2 - x^2)\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^{-1}.$$
Posons $u = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Alors, $u \to 0$ lorsque $x \to 0$. On peut donc appliquer la formule de cours suivante :
$$(1 - u)^{-1} = 1 + u + u^2 + o(u^2), \qquad \text{lorsque } u \to 0$$
On s'est contenté d'appliquer cette formule à l'ordre 2 car u a l'ordre de grandeur de x^2 lorsque $x \to 0$.
Par troncature, on a
$$u^2 = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$$

Et donc
$$f(x) = (\pi^2 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right).$$
Comme $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10}{360} - \frac{3}{360} = \frac{7}{360}$, on en déduit que
$$f(x) = (\pi^2 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)\right).$$
Notons que ce produit ne fait apparaître que des puissances paires de x. En le développant par ordres de grandeur (on compte les termes constants, puis les termes d'ordre 2, d'ordre 4 et enfin ceux d'ordre plus élevé), on trouve finalement
$$f(x) = \pi^2 + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)x^2 + \left(\frac{7\pi^2}{360} - \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4), \quad \text{lorsque } x \to 0^+. \tag{1}$$
Comme le remarque l'énoncé, tous les coefficients font apparaître la constante π^2. De plus, le développement limité ne fait apparaître que des termes pairs, propriété attendue de toute fonction paire. Si nous avions fait une erreur de calcul, elle serait donc à chercher dans la valeur des autres constantes. De plus, en tapant la commande

```
series x(pi^2-x^2)/sin x
```

dans le moteur de calcul en ligne Wolfram Alpha, le résultat trouvé par l'ordinateur est en accord avec notre calcul. On n'a donc *probablement* pas fait d'erreur.

5. D'après (1), on a
$$f(x) = \pi^2 + 0 \cdot x + o(x), \quad \text{lorsque } x \to 0^+.$$
La tangente au point A est donc la droite horizontale d'équation $y = \pi^2$.
6. D'après (1),
$$f(x) - \pi^2 = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)x^2 + o(x^2)$$
et comme $\frac{\pi^2}{6} - 1 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) - \pi^2 > 0$ dans l'intervalle $]0, \eta[$. Autrement dit, la courbe représentative de f est au dessus de sa tangente au voisinage du point A.

Exercice 2

1. Lorsque $n \to +\infty$,
$$\mathrm{sh}\,(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{2} = \frac{e^n}{2} + o(1).$$
D'où,
$$\ln(2\,\mathrm{sh}\,(n) + 1) = \ln(e^n + 1 + o(1)) = \ln(e^n(1 + o(1))) = \ln(e^n) + \ln(1 + o(1)) = n + o(1).$$
On a rangé les termes par ordre de grandeur à la première égalité ci-dessus, factorisé par le terme dominant à la deuxième et appliqué le DL de $\ln(1+u)$ lorsque $u \to 0$ à la troisième. Un $o(1)$ est *a fortiori* un $o(n)$: (v_n) vérifie donc la propriété (P).
2. Par les mêmes principes, comme $u_n = n + o(n)$, on trouve
$$\ln(u_n) = \ln(n + o(n)) = \ln(n(1 + o(1))) = \ln n + \ln(1 + o(1)) = \ln n + o(1).$$
D'où
$$\frac{\ln u_n}{\ln n} = \frac{\ln n + o(1)}{\ln n} = 1 + o(1/\ln n) \to 1 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$
et donc $\ln(u_n) \sim \ln(n)$.

3. Observons que
$$e^{u_n} = \exp(n + o(n)) = \exp(n)\exp(o(n))$$
A ce stade, on s'arrête et on constate que le comportement asymptotique de $\exp(o(n))$ peut-être très différent selon l'ordre de grandeur du $o(n)$. Il *semble* donc que la propriété $e^{u_n} \sim e^n$ peut être fausse. C'est en effet le cas, par exemple, si le terme $o(n)$ vaut 1.

   Il ne reste plus qu'à résumer nos constations : la suite définie par $u_n = n + 1$ pour $n \in \mathbf{N}$ vérifie la propriété (P) mais
$$e^{u_n} = e^{n+1} = e^n \cdot e \not\sim e^n$$
et donc il n'est pas toujours vrai que $e^{u_n} \sim e^n$.
4. On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty}\{u_n - n\} = 2$. Dans ce cas, en rangeant les termes par ordre de grandeur,
$$e^{u_n} = \exp(n + (u_n - n)) = e^n \exp(u_n - n) = e^n \exp(2 + o(1)) \sim e^2 \cdot e^n$$

Exercice 3

1. L'ensemble F est composé des multiples du vecteur $(2, 1)$. Ainsi, F se représente dans le plan muni d'un repère orthonormé par la droite passant par l'origine de vecteur directeur $(2, 1)$. Puisque $x - 2y = 0$ est l'équation d'une droite dans le plan, G se représente aussi par une droite. De plus $(0, 0) \in G$ et $(2, 1) \in G$ car $x - 2y = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$ ou si $(x, y) = (2, 1)$. Il ne passe par deux points distincts qu'une seule droite. Il *semble* donc que F et G soient égaux.

   Pour le vérifier, on remarque que tout vecteur de la forme $(x, y) = (2\alpha, \alpha)$ est solution de l'équation $x - 2y = 0$, d'où $F \subset G$. Réciproquement, si $(x, y) \in G$, résolvons l'équation $x - 2y = 0$. Une équation, deux inconnues : en posant $y = \alpha$, on trouve $(x, y) = (2\alpha, \alpha)$. Et donc, $G \subset F$.

   Finalement, on a montré que $F_1 = F = G$. En particulier, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En effet, F_1 est non vide car F_1 contient le vecteur nul et si $(x, y) \in F_1$, $(x', y') \in F_1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors
$$(x, y) + \lambda(x', y') = (x + \lambda x', y + \lambda y')$$
et, sachant que $F_1 = G$,
$$(x + \lambda x') - 2(y + \lambda y') = (x - 2y) + \lambda(x' - 2y') = 0.$$
D'où $(x, y) + \lambda(x', y') \in F_1$.
2. H se représente par la droite d'équation $x + y = 0$. Pour K, en utilisant la forme canonique d'un binôme, on a
$$x^2 - 2x + y^2 = (x - 1)^2 - 1 + y^2.$$
Donc, un vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ appartient à K si et seulement si
$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$
On peut donc représenter K par un cercle de rayon 1 et de centre $(1, 0)$. Pour qu'un vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ appartienne simultanément à H et K, il faut et il suffit que $x+y = 0$ et $x^2-2x+y^2 = 0$. Autrement dit $y = -x$ et
$$0 = x^2 - 2x + (-x)^2 = 2x^2 - 2x = 2x(x - 1).$$
Ceci se produit si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (1, -1)$. Donc $H \cap K = \{(0, 0), (1, -1)\}$. Clairement, $H \cap K$ n'est pas un sous-espace vectoriel car pour $(x, y) = (1, -1) \in H \cap K$ et $\lambda = 2$, $\lambda.(x, y) \notin H \cap K$.