Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 5 février 2020

Devoir surveillé n° 1
Corrigé

Exercice 1 On applique l'algorithme de Gauss pour échelonner A en lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est échelonnée en lignes. Pour déterminer le noyau de A, on peut par exemple d'abord chercher sa forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on a échelonné en lignes, on sait que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x + 11t \\ y - t \\ z - 6t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -11t \\ y = t \\ z = 6t. \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\ker A = \{(-11t, t, 6t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}\{(-11, 1, 6, 1)\}.}$$

Exercice 2 1. (a) On a $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A$. On en déduit que $A^3 = A^2 \times A = -A \times A = -A^2 = A$. Plus généralement, montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\boxed{A^n = (-1)^{n+1} A}$$

— C'est vrai pour $n = 1$, puisque $A^1 = (-1)^2 A$.
— Soit $n \geqslant 1$, et supposons que $A^n = (-1)^{n+1} A$. Alors $A^{n+1} = A^n \times A = (-1)^{n+1} A \times A = (-1)^{n+1} A^2 = (-1)^{n+1} \times (-A) = (-1)^{n+2} A$.
— La propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

1. (b) Remarquons que pour $n = 0$, il s'agit de voir s'il existe $u_0 \in \mathbf{R}$ tel que $M^0 = I + u_0 A$. C'est bien le cas avec $u_0 = 0$, puisque $M^0 = I$.

Soit maintenant $n \geqslant 0$, et supposons avoir trouvé u_n tel que $M^n = I + u_n A$. Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} = M^n \times M = (I + u_n A)(I + 4A) &= I + 4A + u_n A + 4u_n A^2 \\ &= I + 4A + u_n A - 4u_n A \\ &= I + (-3u_n + 4)A. \end{aligned}$$

On a donc $M^{n+1} = I + u_{n+1} A$, en posant $u_{n+1} = -3u_n + 4$.

Finalement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geqslant 0} \text{ définie par } u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = -3u_n + 4 \text{ répond à la question.}}$

1. (c) Comme suggéré par l'énoncé, regardons $v_n = u_n - 1$. On a alors, pour tout $\geqslant 0$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -3u_n + 3 = -3(u_n - 1) = -3v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison -3, de sorte que $v_n = (-3)^n v_0$ pour tout n. On en déduit que $u_n = (-3)^n(u_0 - 1) + 1$, c'est-à-dire que $\boxed{u_n = 1 - (-3)^n \text{ pour tout } n \geqslant 0.}$

1. (d) Puisque $M^n = I + u_n A$, le premier coefficient de M^n est égal à $1 + u_n \times (-2) = 1 + (1 - (-3)^n)(-2)$. Toute simplification faite, il est égal à $\boxed{2 \times (-3)^n - 1.}$

2. (a) On a $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et on calcule $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$. On en déduit immédiatement que $\boxed{J^n = J \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

2. (b) Sachant que $M = -3I + 4J$, avec $IJ = JI$, on peut appliquer la formule du binôme, de sorte que

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 4^k J^k.$$

Sachant que $J^k = J$ pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$M^n = (-3)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 4^k \right) J.$$

On calcule maintenant la somme entre parenthèses :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 4^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 4^k \right) - (-3)^n = (4-3)^n - 3^n = 1 - (-3)^n$$

Finalement, pour tout $n \geqslant 0$, $\boxed{M^n = (-3)^n I + (1 - (-3)^n) J}$.

2. (c) Cette dernière formule montre que le premier coefficient de M^n est égal à $(-3)^n + (1 - (-3)^n) \times (-1)$, c'est-à-dire $\boxed{2 \times (-3)^n - 1.}$ On retrouve bien la formule démontrée dans la question 1. (d).

Exercice 3

1. Notons $u(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est définie sur $[0, +\infty[$ et comme Arcsin est définie sur $[-1, 1]$, la fonction f est définie en tous les points x pour lesquels $1 - x^2 \geqslant 0$ et $u(x) \in [-1, 1]$. La première condition équivaut à $x^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire $x \in [-1, 1]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} u(x) \in [-1, 1] &\iff u(x)^2 \leqslant 1 \\ &\iff -1 + 4x^2 - 4x^4 \leqslant 0 \\ &\iff -(1 - 2x^2)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Cette dernière condition étant vraie pour tout x, on en déduit que $\boxed{f \text{ est définie sur } [-1, 1].}$

2. Comme $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et comme Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, la fonction f est dérivable en tout x tel quel $1 - x^2 > 0$ et $u(x) \in]-1, 1[$. La première condition équivaut à $x^2 < 1$, c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$. La deuxième condition, d'après le calcul effectué dans la question précédente, équivaut à $(1 - 2x^2)^2 > 0$, c'est-à-dire $1 - 2x^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\setminus \{-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\}.}$

3. On commence par dériver u : pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, on a

$$u'(x) = 2\sqrt{1 - x^2} + 2x \frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}} = 2\frac{1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot u'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - u(x)^2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2(1 - x^2)}}.$$

Or, on remarque que $\sqrt{1-4x^2(1-x^2)} = \sqrt{(1-2x^2)^2} = |1-2x^2|$, de sorte que

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{|1-2x^2|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Enfin, le premier quotient dans cette expression est égal au signe de $1-2x^2$. Or $1-2x^2 > 0$ si et seulement si $x^2 < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$. En conclusion, nous avons :

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[\ ; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[. \end{cases}}$$

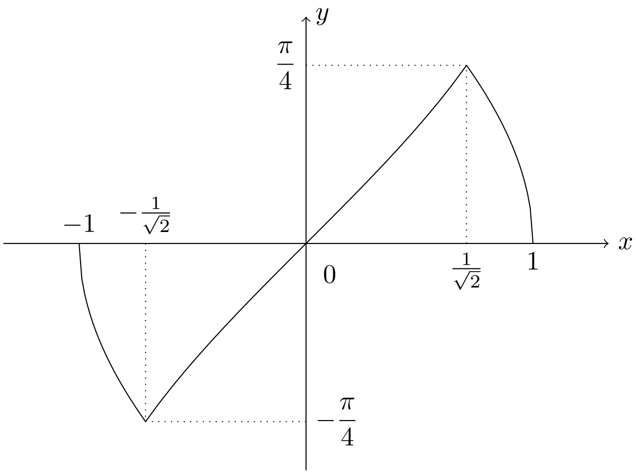
4. On reconnaît les dérivées de Arcsin et de Arccos, et comme $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$ sont des intervalles, il existe deux constantes C et D telles que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \ f(x) = \operatorname{Arcsin} x + C \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[, \ f(x) = \operatorname{Arccos} x + D.$$

Pour déterminer C, on peut évaluer en $x = 0$, ce qui donne, puisque $f(0) = 0$ et $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$: $0 = 0 + C$, c'est-à-dire $C = 0$. Pour déterminer D, on peut faire tendre x vers 1 (remarquez alors que $f(x)$ tend vers $f(1) = 0$ car f est continue en 1), ce qui donne $0 = 0 + D$, c'est-à-dire $D = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\ ; \\ \operatorname{Arccos} x & \text{si } x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[. \end{cases}}$$

5. On trace le graphe sur $[0,1]$ grâce à ces formules (et la continuité de f), puis on complète sur $[-1,1]$ en remarquant que f est une fonction impaire. Remarquez les deux demi-tangentes verticales en -1 et 1, et les deux points anguleux (deux demi-tangentes distinctes à chaque fois) en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Exercice 4
1. Dessiner le graphe d'une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et avec des asymptotes horizontales en $+\infty$ et $-\infty$.
2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$, on sait qu'il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \geqslant b, \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

De même, comme $f(x) \to \ell'$ quand $x \to -\infty$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \leqslant a, \quad \ell' - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell' + \varepsilon.$$

Remarquons qu'on peut toujours supposer $a < b$, puisque les inégalités précédentes sont toujours vraies lorsqu'on remplace b par une valeur plus grande, et a par une valeur plus petite. De plus, pour tout $x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, on a

$$\min(\ell - \varepsilon, \ell' - \varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant \max(\ell + \varepsilon, \ell' + \varepsilon).$$

Il reste à remarquer que $\max(\ell + \varepsilon, \ell' + \varepsilon) = \max(\ell, \ell') + \varepsilon$ et que $\min(\ell - \varepsilon, \ell' - \varepsilon) = \min(\ell, \ell') - \varepsilon$ (en êtes-vous convaincus ?), et l'on a alors

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[, \quad \min(\ell, \ell') - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \max(\ell, \ell') + \varepsilon.}$$

2. (b) Le résultat de la question précédente, appliquée avec $\varepsilon = 1$ par exemple, montre que f est bornée sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$. Par ailleurs, f étant continue sur le *segment* $[a, b]$, elle y est bornée (et atteint ses bornes). Par conséquent, $\boxed{f \text{ est bornée sur }]-\infty, a] \cup [b, +\infty[\cup [a, b] = \mathbf{R}.}$

3. (a) D'après l'hypothèse qui est faite, on a $f(x_0) - \max(\ell, \ell') > 0$: on peut donc utiliser le résultat de la question 2. (a) avec $\varepsilon = f(x_0) - \max(\ell, \ell')$, qui indique qu'il existe $a < b$ tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[, \quad f(x) &\leqslant \max(\ell, \ell') + f(x_0) - \max(\ell, \ell') \\ &\leqslant f(x_0). \end{aligned}$$

De plus, quitte à augmenter la valeur de a et diminuer celle de b, on peut supposer que $a < x_0 < b$, ce qui répond donc à la question.

3. (b) Remarquons déjà que $\sup\limits_{[a,b]} f \leqslant \sup\limits_{\mathbf{R}} f$, puisque $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Pour démontrer l'inégalité contraire, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$. Soit donc $x \in \mathbf{R}$.

— Si $x \in [a, b]$, alors on a $f(x) \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$ par définition même du sup.

— Sinon, $f(x) \leqslant f(x_0)$ d'après 3. (a), et comme $x_0 \in [a, b]$, on a $f(x_0) \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$, ce qui donne $f(x) \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$.

On a donc bien $f(x) \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$ pour tout réel x, ce qui montre que $\boxed{\sup\limits_{\mathbf{R}} f = \sup\limits_{[a,b]} f}$.

3. (c) Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y atteint sa borne supérieure. Or, d'après la question précédente, cette borne supérieure est aussi la borne supérieure de f sur $\mathbf{R}$, qui est donc atteinte.

4. La fonction $f = \text{Arctan}$, par exemple, vérifie les hypothèses générales de l'énoncé puisqu'elle est continue sur $\mathbf{R}$ et a pour limites $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $-\infty$. En revanche, elle ne vérifie pas l'hypothèse de la question 3, car on sait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}\, x \leqslant \frac{\pi}{2}$. De fait, cette fonction admet effectivement une borne supérieure sur $\mathbf{R}$, égale à $\frac{\pi}{2}$, mais cette borne supérieure n'est pas atteinte.