Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2018-2019

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 — 10 avril 2019

Devoir surveillé n°3
Correction

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. **Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.**

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$(une erreur d'énoncé, on doit supposer que $u \in \mathcal{L}(E)$ pour que $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$ ait un sense). Montrer que

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

Proof : *En effet, par le théorème du rang, on a*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

D'ailleurs, puisque $\mathrm{Ker}(u)$ *et* $\mathrm{Im}(u)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, par le théorème de Grassmann,*

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

On en déduit que

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On introduit une fonction f définie par

$$f(x, y, z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z), \forall (x, y, z) \in E.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme sur E.
   Solution : C'est évident que $f : E \to E$*. Il suffit de montrer que* f *est linéaire. Soient* $u = (x_u, y_u, z_u) \in E$ *et* $v = (x_v, y_v, z_v) \in E$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On va vérifier que* $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$*. Observons que*

$$\begin{aligned} f(u+\lambda v) &= f(x_u + \lambda x_v, y_u + \lambda y_v, z_u + \lambda z_v) \\ &= \begin{pmatrix} 17(x_u + \lambda x_v) - 28(y_u + \lambda y_v) + 4(z_u + \lambda y_v) \\ 12(x_u + \lambda x_v) - 20(y_u + \lambda y_v) + 3(z_u + \lambda z_v) \\ 16(x_u + \lambda x_v) - 28(y_u + \lambda y_v) + 5(z_u + \lambda z_v) \end{pmatrix} \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

2. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
   Solution : Notons que

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}, \ f(0,1,0) = \begin{pmatrix} -28 \\ -20 \\ -28 \end{pmatrix}, \ f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de f *dans la base canonique est*

$$M(f) = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 4 \\ 12 & -20 & 3 \\ 16 & -28 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de f. En déduire le rang de f.
Solution : Notons que $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in E | f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. *On résout le système d'équations*

$$\begin{cases} 17x - 28y + 4z & = 0 \\ 12x - 20y + 3z & = 0 \\ 16x - 28y + 5z & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & z \\ y = & \frac{3}{4}z \\ z \in & \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc, on conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \{(z, \frac{3}{4}z, z) | z \in \mathbb{R}\}$. *D'ici, on voit que* $\mathcal{B}_1 = \{(4, 3, 4)\}$ *est une base de* $\mathrm{Ker}(f)$. *De plus, par le théorème du rang, on a*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2.$$

4. Soit $F := \{(x, y, z) \in E : f(x, y, z) = (x, y, z)\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de F.
Solution : Notons que $F \subset E$.
   (a) *Le vecteur nul* $(0, 0, 0) \in F$ *car* $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
   (b) *Soient* $u \in F$ *et* $v \in F$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On va vérifier que* $u + \lambda v \in F$. *Selon la définition de* F, *il suffit de vérifier que* $f(u + \lambda v) = u + \lambda v$. *En effet,*

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) =& f(u) + \lambda f(v), \ \textit{car } f \textit{ est linéaire} \\ =& u + \lambda v, \ \textit{car } f(u) = u, \ f(v) = v \textit{ étant donné } u, v \in F. \end{aligned}$$

Donc, on conclut que F *est un sous-espace vectoriel de* E. *De plus,* $\forall (x, y, z) \in E$,

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \Longleftrightarrow \begin{cases} 17x - 28y + 4z & = x \\ 12x - 20y + 3z & = y \\ 16x - 28y + 5z & = z \end{cases} \Longleftrightarrow 4x - 7y + z = 0.$$

En conséquence, $F = \{(x, y, z) \in E | 4x - 7y + z = 0\} = \{(x, y, 7y - 4x) | x, y \in \mathbb{R}\}$. *D'ici, on voit que* $\mathcal{B}_2 := \{(1, 0, -4), (0, 1, 7)\}$ *est une base de* F.

5. Montrer que $E = F \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
Solution : Premièrement, on a

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Du coup, pour conclure, il suffit de montrer que $F \cap \mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$. *Soit* $u \in F \cap \mathrm{Ker}(f)$. *on a*

$$\begin{cases} u \in F & \Longrightarrow f(u) = u \\ u \in \mathrm{Ker}(f) & \Longrightarrow f(u) = 0_E \end{cases}$$

Donc, $u = 0_E = (0, 0, 0)$. *On en déduit que* $F \cap \mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$. *Alors,* $E = F \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

6. Écrire $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$: la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.
Solution : Pour la simplicité, on écrit

$$e_1 = (4, 3, 4) \in \mathrm{Ker}(f), \ e_2 = (1, 0, -4) \in F, \ e_3 = (0, 1, 7) \in F.$$

Alors, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. *Puisque* $f(e_1) = 0_E$, $f(e_2) = e_2$ *et* $f(e_3) = e_3$,

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que $f^2 = f$ où $f^2 = f \circ f$.
Solution : Notons que $f^2 \in \mathcal{L}(E)$ *et que*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Donc, $f^2 = f$.

8. Soit $g = f + \mathrm{id}$. Montrer que $g^2 = 3g - 2\mathrm{id}$. En déduire que g est inversible. Et exprimer son inverse g^{-1} comme une combinaison linéaire de f et id.
   Solution : Observons que $g \in \mathcal{L}(E)$ et que
   $$\begin{aligned} g^2 =&(f+\mathrm{id})^2 = f^2 + 2f + \mathrm{id} \\ =&3f + \mathrm{id} = 3(f+\mathrm{id}) - 2\mathrm{id} \\ =&3g - 2\mathrm{id}. \end{aligned}$$
   D'ici, on a
   $$(\frac{3}{2}\mathrm{id} - \frac{1}{2}g)g = (\frac{3}{2}\mathrm{id} - \frac{1}{2}g) \circ g = g \circ (\frac{3}{2}\mathrm{id} - \frac{1}{2}g) = \mathrm{id}$$
   Donc, g est inversible et
   $$g^{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{id} - \frac{1}{2}g = \mathrm{id} - \frac{1}{2}f.$$

Exercice 3 Résoudre des équations différentielles suivantes.

1. (E_0) : $2y'(x) - y(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Solution : Pour (E_0), les solutions homogènes sont de la forme $y_0(x) = \lambda e^{x/2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On observe aussi que la solution particulière est de la forme $y_1(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ á déterminer. Alors, l'équation $2y_1'(x) - y_1(x) = x^2$ implique que
   $$2(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = x^2.$$
   Donc, $a = -1$, $b = -4$, $c = -8$ et la solution particulère est $y_1(x) = -x^2 - 4x - 8$. Toutes les solutions de (E_0) sont $\{x \mapsto \lambda e^{x/2} - x^2 - 4x - 8 | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. (E_1) : $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Solution : Pour (E_1), léquation caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = 0$ dont $X = 2$ est la racine de multiplicité 2. Donc, les solutions homogènes sont $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Observons que la solution particulière est de la forme $y_1(x) = ax^2 e^{2x}$. Alors, l'équation $y_1''(x) - 4y_1'(x) + 4y_1(x) = e^{2x}$ implique que
   $$(4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x} - 4(2ax + 2ax^2)e^{2x} + 4ax^2 e^{2x} = e^{2x}.$$
   Du coup, $a = 1/2$ et la solution particulière est $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$. Toutes les solutions de (E_0) sont $\{x \mapsto (\lambda x + \mu + \frac{1}{2}x^2)e^{x/2} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
3. (E_2) : $(1 + x^2)y'(x) - xy(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec $y(0) = 1$.
   Solution : Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$, (E_2) est équivalente à
   $$y'(x) - \frac{x}{x^2+1}y(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$
   Premièrement, les solutions de $y'(x) - \frac{x}{x^2+1}y(x) = 0$ sont $y_0(x) = \lambda e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $\frac{x}{x^2+1}$. Notons que
   $$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + constante.$$
   On peut prendre $A(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et $y_0(x) = \lambda\sqrt{x^2+1}$. Pour trouver les solutions de (E_2), on pose $y(x) = \lambda(x)\sqrt{x^2+1}$ par la variation de la constante. Alors, (E_2) implique que
   $$\lambda'(x)\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \Longrightarrow \lambda(x) = \int \lambda'(x)dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + constante.$$
   En particulier, si on prend $\lambda(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, on voit que $y(x) = -1$ est une solution particulière. En général, les solutions de (E_2) sont $y(x) = y_0(x) - 1 = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} - 1$. Si $y(0) = 1$, on a $\lambda - 1 = 1 \Longrightarrow \lambda = 2$. Donc la solution avec $y(0) = 1$ est
   $$y(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$