Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 13 mars 2019

Devoir surveillé n° 2
Corrigé

Exercice 1
1. En posant $x = 1 + h$, nous avons $\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}$ lorsque $h \to 0$. Ainsi,

$$f(1+h) = \ln\left(2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right).$$

En factorisant par 2 à l'intérieur du logarithme et en transformant ce dernier, on obtient donc

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{16} + o(h^2)\right) \\ &= \ln 2 + \left(\frac{h}{4} - \frac{h^2}{16}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{4} - \frac{h^2}{16}\right)^2 + o(h^2) \\ &= \ln 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{16} - \frac{h^2}{32} + o(h^2) \\ &= \ln 2 + \frac{h}{4} - \frac{3}{32}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

On peut réécrire ce développement limité sous la forme suivante :

$$\boxed{f(x) = \ln 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \text{ quand } x \to 1.}$$

2. Nous avons affaire à une forme indéterminée du type 1^∞. Pour la lever, commençons par remarquer que lorsque $n \to +\infty$, on a

$$3\sqrt[n]{2} = 3\exp\frac{\ln 2}{n} = 3\left(1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad 2\sqrt[n]{3} = 2\exp\frac{\ln 3}{n} = 2\left(1 + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ainsi, on a

$$3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} = 1 + \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\ln(8/9)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

puisque $3\ln 2 - 2\ln 3 = \ln(2^3) - \ln(3^2) = \ln(8/9)$. En élevant à la puissance n, il vient donc

$$\begin{aligned} u_n = \left(1 + \frac{\ln(8/9)}{n} + o(n)\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{\ln(8/9)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{\ln(8/9)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right). \\ &= \exp\left(\ln(8/9) + o(1)\right). \end{aligned}$$

Cela montre que $u_n \to \exp(\ln(8/9))$ lorsque $n \to +\infty$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{8}{9}.}$$

Exercice 2 1. D'après les formules du cours, lorsque $x \to 0$, on a immédiatement

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}.$$

Pour effectuer ce quotient de développements limités, on peut soit utiliser la formule $\frac{1}{1+u}$, soit effectuer la division selon les puissances croissantes de x.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & -\dfrac{x^2}{6} & +o(x^2) & 1 & -\dfrac{x}{2} & +\dfrac{x^2}{3} & +o(x^2) \\ \cline{5-8}
1 & -\dfrac{x}{2} & +\dfrac{x^2}{3} & +o(x^2) & 1 & +\dfrac{x}{2} & -\dfrac{x^2}{4} & \\ \cline{1-4}
 & \dfrac{x}{2} & -\dfrac{x^2}{2} & +o(x^2) & & & & \\
 & \dfrac{x}{2} & -\dfrac{x^2}{4} & +o(x^2) & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -\dfrac{x^2}{4} & +o(x^2) & & & &
\end{array}$$

Ainsi, on a trouvé que

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \text{ lorsque } x \to 0.}$$

2. Le développement limité précédent montre immédiatement que $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$. La fonction f se prolonge donc par continuité en 0 lorsqu'on pose $\boxed{f(0) = 1}$.

3. L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en 0 montre que cette fonction est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. La dérivabilité de f en 0 assure l'existence d'une tangente T à son graphe au point d'abscisse 0, dont l'équation est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Ainsi, l'équation cherchée est $\boxed{y = \dfrac{x}{2} + 1}$.

4. Étudier la position de la tangente T par rapport au graphe de f revient à étudier le signe de $f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$. Or, lorsque $x \to 0$, on a

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = -\frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Au voisinage de 0, le signe de $f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$ est donc le même que celui de $-\dfrac{x^2}{4}$, c'est-à-dire qu'il est négatif.

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, la tangente au graphe de } f \text{ au point d'abscisse 0 est située au-dessus de ce graphe.}}$$

Exercice 3

1. On vérifie d'abord que $E \subset \mathbf{R}^4$ et que $(0,0,0,0) \in \mathbf{R}^4$. Ensuite, soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X, X' \in E$. Posant $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$, on a $\lambda X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$. Or,

$$-(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') = \lambda \underbrace{(-x + y + 2z)}_{=0 \text{ car } X \in E} + \underbrace{(-x' + y' + 2z')}_{=0 \text{ car } X' \in E} = 0.$$

De même, on a $(\lambda y + y') + (\lambda t + t') = 0$, ce qui montre que $\lambda X + X' \in E$, et donc que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2. Déterminer si la famille (u, v, w) est liée ou libre revient à voir si l'équation $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ (E), d'inconnue (α, β, γ), admet ou non d'autres solutions que $(0, 0, 0)$. Or,

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (3\alpha + 4\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, \alpha + \beta + \gamma, -\alpha - 2\beta + \gamma) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} 3\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta + \gamma = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque que la quatrième équation est identique à la deuxième, de sorte que

$$(E) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Ce système admet des solutions non triviales, comme $(-3, 2, 1)$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est liée}}$.

3. Pour répondre à cette question, on peut par exemple commencer par remarquer que $\dim F \leqslant 2$, puisque F est engendré par une famille liée de trois vecteurs. Or, la famille (u,v) est libre puisque c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires. Comme u et v sont des éléments de F, cela implique nécessairement $\dim F \geqslant 2$. Vu l'autre inégalité, on a donc $\dim F = 2$ et donc $\boxed{\text{la famille } (u,v) \text{ est une base de } F}$.

Remarque : on aurait aussi pu échelonner en colonnes la matrice dont les colonnes sont u, v et w, les colonnes non nulles de la matrice échelonnée donnant une base de F.

4. On peut déjà vérifier que u et v sont des éléments de E, puisque leurs coordonnées satisfont les équations de définition de E. Comme $F = \mathrm{Vect}(u,v)$, cela montre que $F \subset E$.

Par ailleurs, on peut remarquer que

$$\begin{cases} -x + y + 2z \quad = 0 \\ \qquad y \qquad + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 2z \\ t = -y, \end{cases}$$

ce qui montre que $E = \{(y+2z, y, z, -y) | y, z \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,-1),(2,0,1,0)\right)$. Or, les vecteurs $(1,1,0,-1)$ et $(2,0,1,0)$ forment une famille libre puisqu'ils ne sont pas colinéaires, de sorte que $\dim E = 2$.

On a donc montré que $F \subset E$ et que $\dim F = \dim E$, ce qui permet de conclure que $\boxed{E = F}$.

Exercice 4

1. On remarque déjà que $E \subset \mathbf{R}^3$ et que $(0,0,0) \in E$ puisqu'on peut écrire $(0,0,0) = (3 \cdot 0 - 0, 0 + 0, 0)$. Soient maintenant $\lambda \in \mathbf{R}$ ainsi que $X, X' \in E$. Il existe donc des réels α, β, α', β' tels que

$$X = (3\alpha - \beta, \alpha + \beta, \beta) \quad \text{et} \quad X' = (3\alpha' - \beta', \alpha' + \beta', \beta').$$

On a alors $\lambda X + X' = (3(\lambda\alpha + \alpha') - (\lambda\beta + \beta'), (\lambda\alpha + \alpha') + (\lambda\beta + \beta'), \lambda\beta + \beta'))$. Ce vecteur est bien de la forme $(3\alpha'' - \beta', \alpha'' + \beta'', \beta'')$ avec $\alpha'' = \lambda\alpha + \alpha'$ et $\beta'' = \lambda\beta + \beta' \in \mathbf{R}$, ce qui montre que $\lambda X + X' \in E$, et donc que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2. Les vecteurs $e_1 = (3,1,0)$ et $e_2 = (-1,1,1)$ forment une famille libre car ce sont deux vecteurs non colinéaires. Comme par définition, ils engendrent également E, ils en forment donc une base. Ainsi, $\dim E = 2$.

Pour F, remarquons que $x + y + z = 0 \iff z = -x - y$, de sorte que

$$F = \{(x, y, -x - y) \mid x, y, \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Or, les deux vecteurs $f_1 = (1,0,-1)$ et $f_2 = (0,1,-1)$ forment une famille libre : ils forment donc aussi une base de F. Ainsi, $\dim F = 2$.

Pour G, on écrit $2x - 2y + 3z = 0 \iff y = x + \frac{3}{2}z$ par exemple, d'où

$$G = \{(x, x + \frac{3}{2}z, z) \mid x, z, \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,\frac{3}{2},1)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,3,2)).$$

Les deux vecteurs $g_1 = (1,1,0)$ et $g_2 = (0,3,2)$ forment une famille libre : ils forment donc aussi une base de G. Ainsi, $\dim G = 2$.

3. Soit $X \in E \cap F$. Comme $X \in E$, il existe deux réels α, β tels que $X = (3\alpha - \beta, \alpha + \beta, \beta)$. Mais comme $X \in F$, ses coordonnées vérifient l'équation $x + y + z = 0$, c'est-à-dire

$$3\alpha - \beta + \alpha + \beta + \beta = 0, \quad \text{ou encore} \quad 4\alpha + \beta = 0.$$

On a donc $\beta = -4\alpha$, et donc $X = (7\alpha, -3\alpha, -4\alpha) = \alpha(7,-3,-4)$. Cela montre que $E \cap F \subset \mathrm{Vect}((7,-3,-4))$. Par ailleurs, E et F sont deux plans vectoriels distincts (en effet, on a par exemple $e_1 \notin F$), de sorte que $E \cap F$ est une droite, c'est-à-dire que $\dim(E \cap F) = 1$. On a donc $E \cap F \subset \mathrm{Vect}((7,-3,-4))$ et $\dim(E \cap F) = \dim \mathrm{Vect}((7,-3,-4))$, d'où $\boxed{E \cap F = \mathrm{Vect}((7,-3,-4))}$.

4. D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$, ce qui donne ici $\dim(E + F) = 2 + 2 - 1 = 3$. Ainsi, $E + F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3 : nécessairement, $\boxed{E + F = \mathbf{R}^3}$.

Remarque : on aurait aussi pu échelonner en colonnes la matrice dont les colonnes sont e_1, e_2, f_1 et f_2, et constater que la matrice échelonnée possède exactement trois colonnes non nulles.

5. Attention : une erreur d'énoncé (dans la définition de E) rend fausse cette question. En effet, dire que $E \cap F$ est inclus dans G revient à dire que $(7, -3, -4) \in G$, c'est-à-dire que $2 \times 7 - 2 \times (-3) + 3 \times (-4) = 0$, ce qui est faux.

6. Pour déterminer V, on peut chercher à compléter $a = (5, -1, 4)$ en une base (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$: il suffira alors de poser $V = \mathrm{Vect}(b, c)$. Essayons avec $b = (1, 0, 0)$ et $c = (0, 1, 0)$. Soient donc λ, μ, ν des réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$. On a alors

$$\begin{cases} 5\lambda + \mu & = 0 \\ -\lambda \quad + \nu & = 0 \\ 4\lambda & = 0. \end{cases}$$

On obtient immédiatement $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui montre que (a, b, c) est une famille libre. Comme elle est formée de 3 éléments et que $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

Comme expliqué précédemment, $V = \mathrm{Vect}(b, c) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est donc un supplémentaire de $E \cap F$ dans $\mathbf{R}^3$.