



Équations différentielles

Fiche de Léa Blanc-Centi.

1 Ordre 1

Exercice 1

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2 \sin x$ (E_2)
3. $y' - y = (x + 1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006991]

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006992]

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur \mathbb{R} . Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0; \pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006993]

Exercice 4 Variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur \mathbb{R} , avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006994]

Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006995]

Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur \mathbb{R} tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006996]

2 Second ordre

Exercice 7

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2x$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006997]

Exercice 8

On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006998]

Exercice 9

Résoudre sur $]0; \pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \cotan x$, où $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006999]

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur \mathbb{R} , en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007000]

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 Équations de Bernoulli et Riccati

1. Équation de Bernoulli

- (a) Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

(b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

2. Équation de Riccati

(a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

(b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007001]

Exercice 12

1. Montrer que toute solution sur \mathbb{R} de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.

2. Montrer que toute solution sur \mathbb{R} de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (*Indication* : étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007002]

Exercice 13

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).

2. Trouver toutes les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \neq 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[007003]