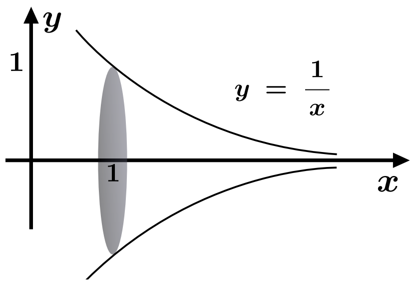
Math Analyse II Cours de Francis Clarke Partiel du 4 mai 2016

L'utilisation de documents de toute nature, de calculatrices, de téléphones ou autres appareils électroniques n'est pas autorisée. Les exercices sont de poids égal.

1. Dans le plan, on prend la partie de la courbe $y = \frac{1}{x}$ où $x \geqslant 1$, et on effectue une rotation autour de l'axe des x ; on obtient ainsi une flute infiniment longue. (Voir la figure ci-dessous, où l'on rappelle aussi les formules pour l'aire et le volume de la surface et du solide obtenus lorsque l'on effectue une rotation autour de l'axe des x du graphe d'une fonction f, pour x entre a et b.)



$$\textbf{Aire} \;=\; 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

$$\textbf{Volume} \;=\; \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx.$$

(a) Écrire l'intégrale (impropre) I qui donne le volume que contient la flute.

(b) Écrire l'intégrale (impropre) J qui donne l'aire de la surface de la flute.

(c) Montrer que I converge, et trouver sa valeur.

(d) Prouver que J diverge vers $+\infty$.

2. Trouver les DL d'ordre 8 autour de 0 des deux fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto f(x) = x^7 + \sin^9 x$ (b) $x \mapsto g(x) = \arcsin x$.

3. Calculer le DL d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $x \mapsto f(x) = e^{\cos x}$.

4. Déterminer $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+2x^5\right)}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin\left(x^3\right)}$.

5. On considère la fonction f définie autour de 0 par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prouver que f est continue en 0.

(b) Montrer que f admet un DL d'ordre 3 autour de 0, et calculer celui-ci.

Corrigé

1. Dans le plan, on prend la partie de la courbe $y = \frac{1}{x}$ où $x \geqslant 1$, et on effectue une rotation autour de l'axe des x ; on obtient ainsi une flute infiniment longue.
(a) Écrire l'intégrale (impropre) I qui donne le volume que contient la flute.
(b) Écrire l'intégrale (impropre) J qui donne l'aire de la surface de la flute.
(c) Montrer que I converge, et trouver sa valeur.
(d) Prouver que J diverge vers $+\infty$.

$I = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx,\ J = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}\, dx$. Détails : voir CM6, p. 5-6.

2. Trouver les DL d'ordre 8 autour de 0 des deux fonctions suivantes :
(a) $x \mapsto f(x) = x^7 + \sin^9 x$ (b) $x \mapsto g(x) = \arcsin x$.

(a) : Puisque $\sin^9 x = o\big(x^8\big)$, le DL recherché est $f(x) = x^7 + o\big(x^8\big)$.
(b) : voir CM10, p. 43 (même polynome pour $n = 7$ ou 8 car arcsin est impaire).

3. Calculer le DL d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $x \mapsto f(x) = e^{\cos x}$.

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e^{1+(\cos x - 1)} = e \times e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o\left(x^7\right)} \\
&= e \times \Big\{ 1 + \Big[-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6\Big] + \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6\Big]^2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{6}\Big[-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6\Big]^3 \Big\} + o\big(x^7\big) \text{ (par le cours, car } \cos x - 1 = 0 \text{ en 0)} \\
&= e\Big\{1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \big(\tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{8}\big)x^4 - \big(\tfrac{1}{720} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{48}\big)x^6\Big\} + o\big(x^7\big) \\
&= e\Big\{1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{31}{720}x^6\Big\} + o\big(x^7\big) = e - \tfrac{e}{2}x^2 + \tfrac{e}{6}x^4 - \tfrac{31e}{720}x^6 + o\big(x^7\big)
\end{aligned}$$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(1+2x^5\big)}{\big(e^{x^2}-1\big)\sin\left(x^3\right)}$.

Avec les DL, la fonction $= \dfrac{2x^5 + o\big(x^5\big)}{(x^2 + o(x^2))\,(x^3 + o(x^3))} = \dfrac{2 + o\big(x^5\big)/x^5}{(1 + o(x^2)/x^2)\,(1 + o(x^3)/x^3)}$,
qui tend visiblement vers 2 quand $x \to 0$.

5. On considère la fonction f définie autour de 0 par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prouver que f est continue en 0.

(b) Montrer que f admet un DL d'ordre 3 autour de 0, et calculer celui-ci.

(a) : On trouve $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 = f(0)$, d'où la continuité de f en 0.
(b) : le DL se calcul facilement par division euclidienne ; détails CM10, p. 34-35.