

CONTRÔLE CONTINU 2

Correction

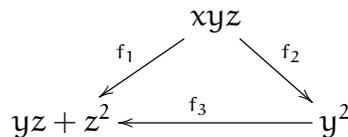
EXERCICE 1 (8 pts)

On se place dans l'anneau $\mathbb{K}[x, y, z]$ avec l'ordre lexicographique gradué associé à l'ordre alphabétique $x > y > z$. On définit l'idéal $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ avec

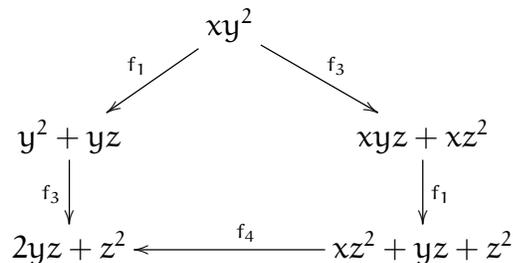
$$f_1 = xy - y - z \quad \text{et} \quad f_2 = xyz - y^2.$$

1. Calculer la base de Gröbner réduite de I .

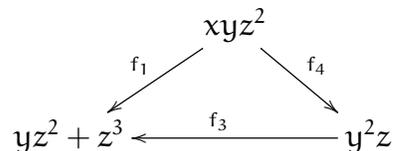
Solution. On commence par calculer une base de Gröbner de I . On considère la paire critique (f_1, f_2) .



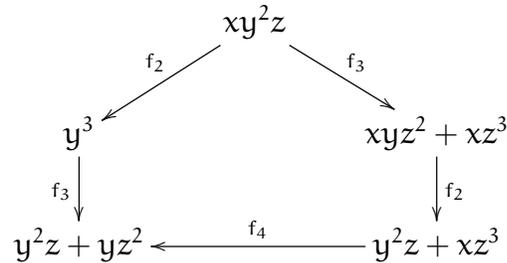
On ajoute le polynôme $f_3 = y^2 - yz - z^2$. Pour la paire critique (f_1, f_3) , on obtient



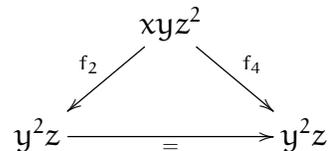
On ajoute donc le polynôme $f_4 = xz^2 - yz$. Pour la paire critique (f_1, f_4) , on obtient



et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_2, f_3) , on obtient



et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_2, f_4) , on obtient



et cette paire est confluente. Finalement, pour la paire critique (f_3, f_4) , on voit directement qu'elle est confluente puisque les termes dominants sont premiers entre eux. Ainsi, une base de Gröbner de I est

$$\{xy - y - z, xyz - y^2, y^2 - yz - z^2, xz^2 - yz\}.$$

On en déduit que $\langle \text{lt}(I) \rangle = \langle xy, y^2, xz^2 \rangle$ et donc

$$G = \{xy - y - z, y^2 - yz - z^2, xz^2 - yz\}$$

est aussi une base de Gröbner de I . On vérifie directement que chaque polynôme g de G est réduit modulo $G \setminus \{g\}$. Donc G est la base de Gröbner réduite de I .

2. Pour les polynômes suivants, déterminer si oui ou non ils appartiennent à I

$$h_1 = x^2z^2 + y^2 - 2yz - 2z^2, \quad h_2 = xz^2 + xy + y^2, \quad h_3 = xz^2 - y^2 + z^2.$$

Solution. Notons $g_1 = xy - y - z$, $g_2 = y^2 - yz - z^2$ et $g_3 = xz^2 - yz$ les trois polynômes de la base G . On a

$$h_1 \xrightarrow{g_2} x^2z^2 - yz - z^2 \xrightarrow{g_3} xyz - yz - z^2 \xrightarrow{g_1} 0$$

et donc $h_1 \in I$. Puis, on calcule

$$h_2 \xrightarrow{g_3} xy + y^2 + yz \xrightarrow{g_1} y^2 + yz + y + z \xrightarrow{g_2} 2yz + z^2 + y + z$$

et le résultat est réduit modulo G et est différent de 0, donc $h_2 \notin I$. Finalement, on a

$$h_3 \xrightarrow{g_2} xz^2 - yz \xrightarrow{g_3} 0$$

et donc $h_3 \in I$.

EXERCICE 2 (14 pts)

On se place dans l'anneau $\mathbb{K}[x, y]$ avec l'ordre lexicographique associé à l'ordre alphabétique $x > y$.

1. Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux couples d'entiers positifs ou nuls. Montrer que

$$(x^{a_1}y^{b_1} \text{ divise } x^{a_2}y^{b_2}) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2).$$

Solution. On a $x^{a_1}y^{b_1}$ divise $x^{a_2}y^{b_2}$ si et seulement si il existe deux entiers $a, b \geq 0$ tels que $x^{a_2}y^{b_2} = x^{a_1}y^{b_1}x^a y^b = x^{a_1+a}y^{b_1+b}$. On en déduit que $a_2 = a_1 + a$ et $b_2 = b_1 + b$ et donc $x^{a_1}y^{b_1}$ divise $x^{a_2}y^{b_2}$ si et seulement si $a_2 \geq a_1$ et $b_2 \geq b_1$.

2. Soit $N \geq 1$ un entier fixé.

(a) Pour $i \in \{0, \dots, N\}$, on pose $f_i = x^i y^{N-i}$. On considère l'idéal

$$I = \langle f_0, \dots, f_N \rangle.$$

- i. Déterminer $\langle \text{lt}(I) \rangle$.

Solution. Puisque I est un idéal monomial, on a $\langle \text{lt}(I) \rangle = I$.

- ii. En déduire la base de Gröbner réduite de I .

Solution. On sait que (f_0, \dots, f_N) est une base de Gröbner de I par la question précédente. De plus, par la question 1, pour f_i un élément de cette base, f_i ne peut se réduire par aucun des autres éléments f_j de la base puisque on a toujours $i > j$ ou $N - i > N - j$. Donc cette base est réduite.

(b) Pour $i \in \{0, \dots, N\}$, on pose $g_i = x^i y^{N-i} + 1$. On considère l'idéal

$$J = \langle g_0, \dots, g_N \rangle.$$

- i. Soit $i \in \{0, \dots, N-1\}$. Calculer le S -polynôme de g_i et g_{i+1} .
En déduire que $x - y \in J$.

Solution. On a $\text{ppcm}(\text{lm}(g_i), \text{lm}(g_{i+1})) = \text{ppcm}(x^i y^{N-i}, x^{i+1} y^{N-i-1}) = x^{i+1} y^{N-i}$. Puis, on calcule

$$\begin{aligned} S(g_i, g_{i+1}) &= \frac{x^{i+1} y^{N-i}}{x^i y^{N-1}} g_i - \frac{x^{i+1} y^{N-i}}{x^{i+1} y^{N-i-1}} g_{i+1} \\ &= x(x^i y^{N-i} + 1) - y(x^{i+1} y^{N-i-1} + 1) \\ &= x^{i+1} y^{N-i} + x - x^{i+1} y^{N-i} - y \\ &= x - y. \end{aligned}$$

Puisque g_i et g_{i+1} sont dans J , leur S -polynôme est dans J et donc $x - y \in J$.

- ii. Montrer que (g_0, \dots, g_N) n'est pas une base de Gröbner de J .

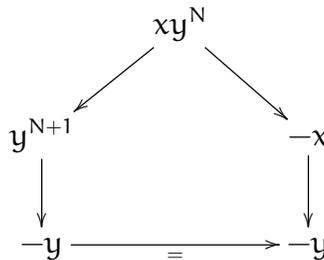
Solution. Par la question précédente, on a sait que $x \in \langle \text{lt}(J) \rangle$. D'un autre côté, on voit que $\text{lt}(g_i)$ ne divise pas x pour $i = 0, \dots, N$. On en déduit que $\langle \text{lt}(J) \rangle \neq \langle \text{lt}(g_0), \dots, \text{lt}(g_N) \rangle$ et donc (g_0, \dots, g_N) n'est pas une base de Gröbner de J .

- iii. Pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, montrer que $g_{i+1} = x^i y^{N-(i+1)}(x - y) + g_i$. En déduire que $(x - y, y^N + 1)$ est une base de J .

Solution. Un calcul direct montre que $g_{i+1} = x^i y^{N-(i+1)}(x - y) + g_i$ pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$. On en déduit que $g_1 = y^{N-1}(x - y) + g_0$ et donc $g_1 \in \langle x - y, y^N + 1 \rangle$. De la même manière, on a $g_2 = xy^{N-2}(x - y) + g_1$ et donc g_2 est une combinaison de g_1 et de $x - y$ et donc appartient à $\langle x - y, y^N + 1 \rangle$. En itérant, on obtient aussi que g_3, \dots, g_N appartiennent à $\langle x - y, y^N + 1 \rangle$. Ainsi, on a $J = \langle g_0, \dots, g_N \rangle \subset \langle x - y, y^N + 1 \rangle$. Comme l'autre inclusion est évidente, on en déduit que $J = \langle x - y, y^N + 1 \rangle$.

- iv. Calculer la base de Gröbner réduite de J .

Solution. On considère la paire critique $(x - y, y^N + 1)$. On obtient



et cette paire est confluente. Donc $(x - y, y^N + 1)$ est une base de Gröbner de J . Il est clair que cette base est réduite pour $N \geq 2$. Pour $N = 1$, on obtient que $x - y$ peut être réduit par $y + 1$ et donc la base réduite est $(x + 1, y + 1)$.