Université Claude Bernard Lyon 1 - Printemps 2016
Licence Sciences, Technologies, Santé - Mention mathématiques

Algèbre appliquée - MAT2054L

CONTRÔLE CONTINU 2

Correction

EXERCICE 1 (8 pts)

On se place dans l'anneau $\mathbb{K}[x, y, z]$ avec l'ordre lexicographique gradué associé à l'ordre alphabétique $x > y > z$. On définit l'idéal $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ avec

$$f_1 = xy - y - z \quad \text{et} \quad f_2 = xyz - y^2.$$

1. Calculer la base de Gröbner réduite de I.

   <u>Solution.</u> *On commence par calculer une base de Gröbner de* I. *On considère la paire critique* (f_1, f_2).

$$\begin{tikzcd} & xyz \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ yz + z^2 & & y^2 \arrow[ll, "f_3"'] \end{tikzcd}$$

   On ajoute le polynôme $f_3 = y^2 - yz - z^2$. *Pour la paire critique* (f_1, f_3), *on obtient*

$$\begin{tikzcd} & xy^2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\ y^2 + yz \arrow[d, "f_3"'] & & xyz + xz^2 \arrow[d, "f_1"] \\ 2yz + z^2 & & xz^2 + yz + z^2 \arrow[ll, "f_4"'] \end{tikzcd}$$

   On ajoute donc le polynôme $f_4 = xz^2 - yz$. *Pour la paire critique* (f_1, f_4), *on obtient*

$$\begin{tikzcd} & xyz^2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_4"] & \\ yz^2 + z^3 & & y^2z \arrow[ll, "f_3"'] \end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_2, f_3)*, on obtient*

$$\begin{tikzcd}
 & xy^2z \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\
y^3 \arrow[d, "f_3"'] & & xyz^2 + xz^3 \arrow[d, "f_2"] \\
y^2z + yz^2 & & y^2z + xz^3 \arrow[ll, "f_4"']
\end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Pour la paire critique (f_2, f_4)*, on obtient*

$$\begin{tikzcd}
 & xyz^2 \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "f_4"] & \\
y^2z \arrow[rr, "="'] & & y^2z
\end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Finalement, pour la paire critique (f_3, f_4)*, on voit directement qu'elle est confluente puisque les termes dominants sont premiers entre eux. Ainsi, une base de Gröbner de* I *est*

$$\{xy - y - z, xyz - y^2, y^2 - yz - z^2, xz^2 - yz\}.$$

On en déduit que $\langle \mathrm{lt}(I) \rangle = \langle xy, y^2, xz^2 \rangle$ *et donc*

$$G = \{xy - y - z, y^2 - yz - z^2, xz^2 - yz\}$$

est aussi une base de Gröbner de I*. On vérifie directement que chaque polynôme* g *de* G *est réduit modulo* $G \setminus \{g\}$*. Donc* G *est la base de Gröbner réduite de* I*.*

2. Pour les polynômes suivants, déterminer si oui ou non ils appartiennent à I

$$h_1 = x^2z^2 + y^2 - 2yz - 2z^2,\ h_2 = xz^2 + xy + y^2,\ h_3 = xz^2 - y^2 + z^2.$$

<u>*Solution.*</u> *Notons* $g_1 = xy - y - z$, $g_2 = y^2 - yz - z^2$ *et* $g_3 = xz^2 - yz$ *les trois polynômes de la base* G*. On a*

$$h_1 \xrightarrow{g_2} x^2z^2 - yz - z^2 \xrightarrow{g_3} xyz - yz - z^2 \xrightarrow{g_1} 0$$

et donc $h_1 \in I$*. Puis, on calcule*

$$h_2 \xrightarrow{g_3} xy + y^2 + yz \xrightarrow{g_1} y^2 + yz + y + z \xrightarrow{g_2} 2yz + z^2 + y + z$$

et le résultat est réduit modulo G *et est différent de* 0*, donc* $h_2 \notin I$*. Finalement, on a*

$$h_3 \xrightarrow{g_2} xz^2 - yz \xrightarrow{g_3} 0$$

et donc $h_3 \in I$*.*

EXERCICE 2 (14 pts)

On se place dans l'anneau $\mathbb{K}[x, y]$ avec l'ordre lexicographique associé à l'ordre alphabétique $x > y$.

1. Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux couples d'entiers positifs ou nuls. Montrer que

$$(x^{a_1}y^{b_1} \text{ divise } x^{a_2}y^{b_2}) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2).$$

   Solution. On a $x^{a_1}y^{b_1}$ *divise* $x^{a_2}y^{b_2}$ *si et seulement si il existe deux entiers* $a, b \geq 0$ *tels que* $x^{a_2}y^{b_2} = x^{a_1}y^{b_1}x^a y^b = x^{a_1+a}y^{b_1+b}$*. On en déduit que* $a_2 = a_1 + a$ *et* $b_2 = b_1 + b$ *et donc* $x^{a_1}y^{b_1}$ *divise* $x^{a_2}y^{b_2}$ *si et seulement si* $a_2 \geq a_1$ *et* $b_2 \geq b_1$*.*

2. Soit $N \geq 1$ un entier fixé.
   (a) Pour $i \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $f_i = x^i y^{N-i}$. On considère l'idéal

$$I = \langle f_0, \ldots, f_N \rangle.$$

      i. Déterminer $\langle \mathrm{lt}(I) \rangle$.

         Solution. Puisque I *est un idéal monomial, on a* $\langle \mathrm{lt}(I) \rangle = I$*.*

      ii. En déduire la base de Gröbner réduite de I.

         Solution. On sait que $(f_0, \ldots, f_N)$ *est une base de Gröbner de* I *par la question précédente. De plus, par la question 1, pour* f_i *un élément de cette base,* f_i *ne peut se réduire par aucun des autres éléments* f_j *de la base puisque on a toujours* $i > j$ *ou* $N - i > N - j$*. Donc cette base est réduite.*

   (b) Pour $i \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $g_i = x^i y^{N-i} + 1$. On considère l'idéal

$$J = \langle g_0, \ldots, g_N \rangle.$$

      i. Soit $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. Calculer le S-polynôme de g_i et g_{i+1}.
         En déduire que $x - y \in J$.

Solution. *On a* $\operatorname{ppcm}(\operatorname{lm}(g_i), \operatorname{lm}(g_{i+1})) = \operatorname{ppcm}(x^i y^{N-i}, x^{i+1} y^{N-i-1}) = x^{i+1} y^{N-i}$. *Puis, on calcule*

$$\begin{aligned} S(g_i, g_{i+1}) &= \frac{x^{i+1} y^{N-i}}{x^i y^{N-1}} g_i - \frac{x^{i+1} y^{N-i}}{x^{i+1} y^{N-i-1}} g_{i+1} \\ &= x(x^i y^{N-i} + 1) - y(x^{i+1} y^{N-i-1} + 1) \\ &= x^{i+1} y^{N-i} + x - x^{i+1} y^{N-i} - y \\ &= x - y. \end{aligned}$$

Puisque g_i *et* g_{i+1} *sont dans* J*, leur* S*-polynôme est dans* J *et donc* $x - y \in J$.

ii. Montrer que $(g_0, \dots, g_N)$ n'est pas une base de Gröbner de J.

Solution. *Par la question précédente, on a sait que* $x \in \langle \operatorname{lt}(J) \rangle$. *D'un autre côté, on voit que* $\operatorname{lt}(g_i)$ *ne divise pas* x *pour* $i = 0, \dots N$. *On en déduit que* $\langle \operatorname{lt}(J) \rangle \neq \langle \operatorname{lt}(g_0), \dots, \operatorname{lt}(g_N) \rangle$ *et donc* $(g_0, \dots, g_N)$ *n'est pas une base de Gröbner de* J.

iii. Pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, montrer que $g_{i+1} = x^i y^{N-(i+1)}(x - y) + g_i$. En déduire que $(x - y, y^N + 1)$ est une base de J.

Solution. *Un calcul direct montre que* $g_{i+1} = x^i y^{N-(i+1)}(x - y) + g_i$ *pour* $i \in \{0, \dots, N-1\}$. *On en déduit que* $g_1 = y^{N-1}(x - y) + g_0$ *et donc* $g_1 \in \langle x - y, y^N + 1 \rangle$. *De la même manière, on a* $g_2 = xy^{N-2}(x - y) + g_1$ *et donc* g_2 *est une combinaison de* g_1 *et de* $x - y$ *et donc appartient à* $\langle x - y, y^N + 1 \rangle$. *En itérant, on obtient aussi que* $g_3, \dots, g_N$ *appartiennent à* $\langle x - y, y^N + 1 \rangle$. *Ainsi, on a* $J = \langle g_0, \dots, g_N \rangle \subset \langle x - y, y^N + 1 \rangle$. *Comme l'autre inclusion est évidente, on en déduit que* $J = \langle x - y, y^N + 1 \rangle$.

iv. Calculer la base de Gröbner réduite de J.

Solution. *On considère la paire critique* $(x - y, y^N + 1)$. *On obtient*

$$\begin{tikzcd} & xy^N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y^{N+1} \arrow[d] & & -x \arrow[d] \\ -y \arrow[rr, "="'] & & -y \end{tikzcd}$$

et cette paire est confluente. Donc $(x - y, y^N + 1)$ *est une base de Gröbner de* J. *Il est clair que cette base est réduite pour* $N \geq 2$. *Pour* $N = 1$*, on obtient que* $x - y$ *peut être réduit par* $y + 1$ *et donc la base réduite est* $(x + 1, y + 1)$.