Université Claude Bernard Lyon 1 - Printemps 2016
Licence Sciences, Technologies, Santé - Mention mathématiques

Algèbre appliquée - MAT2054L

CONTRÔLE CONTINU 1

Correction

EXERCICE 1 (8 pts)

Dans $\mathbb{R}[x]$, on considère l'idéal $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ avec

$$f_1 = x^3 - 2x^2 - x + 2,\ f_2 = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ f_3 = 2x^3 - 4x^2 + x + 1.$$

1. Déterminer le polynôme unitaire g tel que $I = \langle g \rangle$.

   <u>*Solution.*</u> *Par le cours, on a* $g = \gcd(f_1, f_2, f_3)$. *On commence par calculer* $\gcd(f_1, f_2)$. *On a*

   $$2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 2(x^3 - 2x^2 - x + 2) + 5x^2 - 5$$

   et donc $\gcd(f_1, f_2) = \gcd(x^3 - 2x^2 - x + 2, 5x^2 - 5) = \gcd(x^3 - 2x^2 - x + 2, x^2 - 1)$. *Puis, on a*

   $$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1).$$

   Ainsi, on trouve que $\gcd(f_1, f_2) = x^2 - 1$. *Maintenant, on calcule* $g = \gcd(f_1, f_2, f_3) = \gcd(x^2 - 1, f_3)$. *On a*

   $$2x^3 - 4x^2 + x + 1 = (2x - 4)(x^2 - 1) + 3x - 3$$

   d'où $\gcd(x^2 - 1, f_3) = \gcd(x^2 - 1, 3x - 3) = \gcd(x^2 - 1, x - 1) = x - 1$ *puisque* $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. *On a donc* $g = x - 1$.

2. Montrer qu'on a $\langle f_1 \rangle \subset \langle f_1, f_2 \rangle \subset I$ avec $\langle f_1 \rangle \neq \langle f_1, f_2 \rangle$ et $\langle f_1, f_2 \rangle \neq I$.

   <u>*Solution.*</u> *Il est clair que* $\langle f_1 \rangle \subset \langle f_1, f_2 \rangle$ *puisque* $f_1 \in \langle f_1, f_2 \rangle$ *et* $\langle f_1, f_2 \rangle \subset I$ *puisque* $f_1, f_2 \in I$. *Par les calculs de la question 1, on a* $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 - 1 \rangle$ *et donc* $\langle f_1 \rangle \neq \langle f_1, f_2 \rangle$ *car* $x^2 - 1 \notin \langle f_1 \rangle$ *puisque* f_1 *ne divise pas* $x^2 - 1$. *De même, on en déduit que* $\langle f_1, f_2 \rangle \neq I$ *puisque* $x^2 - 1$ *ne divise pas* g.

3. Pour chacun des polynômes suivants, déterminer s'ils appartiennent ou non à $\langle f_1 \rangle$, $\langle f_1, f_2 \rangle$ ou I :

   $$h_1 = x, \quad h_2 = x^2 - 5x - 3, \quad h_3 = 2x^2 - 2.$$

   <u>*Solution.*</u> *Un polynôme* h *appartient à l'idéal engendré par le polynôme* u *si et seulement si* u *divise* h. *Il est clair que* $x - 1$ *ne divise pas* h_1 *et donc* h_1 *n'appartient pas à* I *et donc, a fortiori, n'appartient pas à* $\langle f_1 \rangle$*, ni à* $\langle f_1, f_2 \rangle$. *Maintenant, on a*

   $$x^2 - 5x - 3 = (x - 4)(x - 1) - 7$$

   donc $x - 1$ *ne divise pas* h_2 *et donc* h_2 *n'appartient pas à* I *et donc, a fortiori, n'appartient pas à* $\langle f_1 \rangle$*, ni à* $\langle f_1, f_2 \rangle$. *Pour finir, il est clair que* f_1 *ne divise pas* h_3 *donc* $h_3 \notin \langle f_1 \rangle$. *Cependant, on a* $h_3 = 2(x^2 - 1)$ *et donc* $h_3 \in \langle f_1, f_2 \rangle$ *et donc aussi à* $h_3 \in I$.

EXERCICE 2 **(8 pts)**

1. Déterminer un entier r tel que

$$5x^2 - 2x + 1 = \left(\tfrac{5}{2}x - \tfrac{7}{2}\right)(2x + 2) + r.$$

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de $5x^2 - 2x + 1$ par $2x + 2$.

<u>Solution.</u> *En prenant $x = -1$ dans l'expression, on obtient*

$$5(-1)^2 - 2(-1) + 1 = r$$

et donc $r = 8$. Le quotient et le reste de la division euclidienne de $5x^2 - 2x + 1$ par $2x + 2$ sont respectivement $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ et 8.

2. Soit $n \geq 1$, un entier. On veut déterminer la division euclidienne de $5n^2 - 2n + 1$ par $2n + 2$.

   (a) On suppose pour commencer que n est impair. Montrer que $\frac{5n-7}{2}$ est un entier. En déduire de la question précédente la division euclidienne de $5n^2 - 2n + 1$ par $2n + 2$ pour $n \geq 5$.
   Traiter directement les cas où $n < 5$..

   <u>Solution.</u> *Par ce qui précède, on a*

$$5n^2 - 2n + 1 = \frac{5n - 7}{2}(2n + 2) + 8.$$

   Posons $n = 2m + 1$ avec m un entier. Donc $(5n - 7)/2 = 5m - 1$ est un entier et cette expression est la division euclidienne de $5n^2 - 2n + 1$ par $2n + 2$ à condition que $8 < 2n + 2$, c'est-à-dire $n > 3$ ou encore $n \geq 5$ puisque n est impair. Pour les cas restant $n = 1$ et $n = 3$, on calcule directement

$$\begin{aligned} 4 &= 1 \times 4 + 0 \qquad (n = 1) \\ 40 &= 5 \times 8 + 0 \qquad (n = 3). \end{aligned}$$

   (b) On suppose à présent que n est pair. Montrer que $\frac{5n-7}{2} - \frac{1}{2}$ est un entier. En déduire de la question 1, la division euclidienne de $5n^2 - 2n + 1$ par $2n + 2$ pour $n \geq 8$.
   Traiter directement les cas où $n < 8$.

   <u>Solution.</u> *On pose $n = 2m$. On a alors $\frac{5n-7}{2} - \frac{1}{2} = 5m - 4$ et donc c'est bien un entier. On en déduit que*

$$\begin{aligned} 5n^2 - 2n + 1 &= \left(\frac{5n - 7}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(2n + 2) + 8 \\ &= \left(\frac{5n - 7}{2} - \frac{1}{2}\right)(2n + 2) + n + 9 \end{aligned}$$

est la division euclidienne de $5n^2-2n+1$ *par* $2n+2$ *à condition que* $n+9 < 2n+2$, *c'est-à-dire* $n > 7$ *ou encore* $n \geq 8$. *Pour les cas restant* $n = 2$, $n = 4$ *et* $n = 6$, *on calcule directement*

$$17 = 2 \times 6 + 5 \qquad (n = 2)$$
$$73 = 7 \times 10 + 3 \qquad (n = 4)$$
$$169 = 12 \times 14 + 1 \qquad (n = 6)$$

EXERCICE 3 (6 pts)

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathbb{K}[x, y]$.

1. Montrer que tout élément de $V(f, x - a)$ est de la forme (a, b) avec $b \in \mathbb{K}$.

   Solution. *Soit* $(x_0, y_0) \in V(f, x - a)$. *Alors,* (x_0, y_0) *est une solution de* $x - a$ *et donc* $x_0 = a$. *On a bien* $(x_0, y_0) = (a, b)$ *avec* $b = y_0 \in \mathbb{K}$.

2. Montrer que $(a, b) \in V(f, x - a)$ si et seulement si b est racine du polynôme $f(a, y) \in \mathbb{K}[y]$.

   Solution. *On a* $(a, b) \in V(f, x - a)$ *si et seulement si* (a, b) *est une solution de* f *et de* $x - a$. *C'est une solution de* $x - a$ *par construction, donc* $(a, b) \in V(f, x - a)$ *si et seulement si* $f(a, b) = 0$ *ou encore* b *est racine du polynôme* $f(a, y)$.

3. En déduire $V(f, x + 1)$ pour $f = 3x^2y^2 + 2x^2y + xy^2 - xy - 2y^2 + 2x + 2y + 1$.

   Solution. *Par ce qui précède les éléments de* $V(f, x + 1)$ *sont exactement les couples* $(-1, b)$ *où* b *est une racine de*

   $$f(-1, y) = 5y - 1.$$

   On a donc $V(f, x + 1) = \{(-1, 1/5)\}$.