

Fiche d'exercices n° 4 : Équivalents de fonctions au voisinage d'un point.

Exercice 1. Équivalents de fonctions au voisinage de 0

Par un développement limité au voisinage de 0 montrer les équivalences suivantes :

1. $\sin(x) \sim_0 x$.
2. $\ln(1+x) \sim_0 x$.
3. $\cos(x) - 1 \sim_0 \frac{-x^2}{2}$.
4. $e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}$.
5. $sh(x) \sim_0 x + \frac{x^3}{6}$.
6. $ch(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$.
7. $\frac{1}{1-x} \sim_0 1+x$.
8. $\frac{1}{1+x} \sim_0 1-x$.

Exercice 2. Trouver un équivalent pour chacune des fonctions suivantes

- a) $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0$
- b) $\tan(x) \sim_0$
- c) $\text{Arcsin}(x) \sim_0$
- d) $th(x) \sim_0$
- e) $\text{Arctan}(x) \sim_0$
- f) $\ln(1+sh(2x)) \sim_0$
- g) $e^{ax} - e^{bx} \sim_0$ avec $a \neq b$ deux réels.

Exercice 3. Donner un équivalent au voisinage de x_0 des fonctions suivantes

1. $\ln(x) - 1$ pour $x_0 = e$
2. $\sin(x) - \sin(a)$ pour $x_0 = a$
3. $\tan(x) - x$ pour $x_0 = \frac{\pi}{4}$
4. $1 - \cos(x) + \sin(4x)$ pour $x_0 = 0$
5. $\sqrt{\cos(x)} - 1$ pour $x_0 = 0$
6. $\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln^2(x)}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour $x_0 = +\infty$ puis $x_0 = 0^+$.

Exercice 4. Trouver les équivalents des fonctions suivantes

1. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x + 2}$ en 0
2. $\frac{\sin x}{x^2 \ln(x + 1) + 2x}$ en 0
3. $e^x + \sin(1/x)$ en 0
4. $\exp\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x(x+1)}{x^3}$ en $+\infty$
5. $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$ en 0 et $+\infty$
6. $\exp(\sqrt{x^2 + x + 1})$ en $+\infty$

Exercice 5. Donner l'équivalent le "plus simple" en 0 des fonctions suivantes :

- a) $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\sinh(x)}$
- b) $\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\sinh(x)}$
- c) $\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sin(x) - \tanh^2(x)}}$
- d) $\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\tan(x)}$
- e) $\ln(\cos(x))$
- f) $\ln(\sin(x))$

g) $x^{\sin x} - (\sin(x))^x$

Exercice 6. Donner les équivalents en $+\infty$ des fonctions suivantes

1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

2. $sh(x)$

3. $\sqrt{\ln(x)} - \sqrt{\ln(x+1)}$

4. $\ln(th(x))$

5. $x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

6. $\ln(sh(x))$

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

Que pensez-vous des implications suivantes ?

a) $f(x) \sim_0 g(x) \implies \exp(f(x)) \sim_0 \exp(g(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) = 0 \implies \exp(f(x)) \sim_0 \exp(g(x))$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes trouver un équivalent au voisinage de 0 de la forme λx^α

1. $e^{\sin(x)} - e^{\tanh(x)}$

2. $\left((\cos x)^{x^2} - 1 \right) \tan^3(x)$