CORRIGÉ DU PREMIER CONTRÔLE DU 18 MARS

EXERCICE 1

1. On remarque que $f_1 = g_1 + g_2$ et $f_2 = g_1 - g_2$, et donc $f_1 \in \langle g_1, g_2\rangle$ et $f_2 \in \langle g_1, g_2\rangle$. Ainsi, $I \subseteq J$.

Pour l'autre inclusion, notons que $g_1 = (f_1 + f_2)/2$ et $g_2 = (f_1 - f_2)/2$. Il suit que $g_1 \in \langle f_1, f_2\rangle$ et $g_2 \in \langle f_1, f_2\rangle$, et donc $J \subseteq I$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$. On a :

$(x, y, z) \in W_1 \cup W_2$ si et seulement si
$\Big(x - z^3 + z^2 + 1 = 0 \text{ et } y - z + 1 = 0\Big)$ ou $\Big(x - z^3 + z^2 + 1 = 0 \text{ et } y + z + 1 = 0\Big)$ ssi
$x - z^3 + z^2 + 1 = 0$ et $\Big(y - z + 1 = 0 \text{ ou } y + z + 1 = 0\Big)$ ssi
$x - z^3 + z^2 + 1 = 0$ et $(y - z + 1)(y + z + 1) = 0$ ssi
$x - z^3 + z^2 + 1 = 0$ et $y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$.

Ainsi, $W_1 \cup W_2 = V(g_1, g_2)$. Comme $\langle f_1, f_2\rangle = \langle g_1, g_2\rangle$; on conclut que :

$$W = V(f_1, f_2) = V(g_1, g_2) = W_1 \cup W_2.$$

3. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Alors $(u, v) \in V(x^2 + y^2)$ si et seulement si $u^2 = -v^2$ si et seulement si $u = iv$ ou $u = -iv$.

L'ensemble algébrique affine $V(x^2 + y^2)$ de $\mathbb{C}^2$ est donc l'union des deux droites du plan complexe passant par l'origine et de vecteurs directeurs respectifs $(i, 1)$ et $(-i, 1)$.

EXERCICE 2

1. a. Soient x^α et x^β deux monômes dans $\mathcal{M}(x_1, ..., x_n)$. Alors :
- ou bien $\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$ et donc $x^\alpha \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\beta$,
- ou bien $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$ et donc $x^\beta \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\alpha$,
- ou bien $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ et comme $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ est un ordre monomial et en particulier total, on a soit $x^\alpha \preccurlyeq_{\text{lex}} x^\beta$ et donc $x^\alpha \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\beta$; soit $x^\beta \preccurlyeq_{\text{lex}} x^\alpha$ et donc $x^\beta \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\alpha$.

L'ordre $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$ est par conséquent un ordre total.

b. Soient x^α, x^β et x^γ trois monômes tels que $x^\alpha \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\beta$. Vérifions alors que $x^\alpha x^\gamma \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\beta x^\gamma$:

1er cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$. Alors $\sum_{i=1}^n(\alpha_i + \gamma_i) < \sum_{i=1}^n(\beta_i + \gamma_i)$ et donc $x^\alpha x^\gamma \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\beta x^\gamma$,

2ème cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ et $x^\alpha \preccurlyeq_{\text{lex}} x^\beta$. Alors $\sum_{i=1}^n(\alpha_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^n(\beta_i + \gamma_i)$ et, comme $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ est un ordre monomial, $x^\alpha x^\gamma \preccurlyeq_{\text{lex}} x^\beta x^\gamma$. On a donc également $x^\alpha x^\gamma \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\beta x^\gamma$.

c. Soit x^α un monôme. Ou bien $x^\alpha = 1$ et comme $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$ est un ordre et en particulier une relation réflexive, $1 \preccurlyeq_{\text{grlex}} 1 = x^\alpha$. Ou bien, $\sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$ et donc $1 \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^\alpha$.

L'ordre $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$ vérifie donc les propriétés d'un ordre monomial.

2. On a

$$y^7z^2 \preccurlyeq_{\text{lex}} xyz^2 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^2y^3z^4 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^2y^4 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^3z \quad \text{et}$$

$$xyz^2 \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^3z \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^2y^4 \preccurlyeq_{\text{grlex}} y^7z^2 \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^2y^3z^4.$$

EXERCICE 3

1. Notons que pour l'ordre lexicographique, $\mathrm{lt}(f_1) = x^2y$ et $\mathrm{lt}(f_2) = x^2$. En particulier $x^2y \xrightarrow{f_1} y$ et $x^2 \xrightarrow{f_2} -xy$. L'algorithme de division donne

$$
\begin{tikzcd}
 & xy^2+y & \\
f = x^3y^2+y \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & -y^3+y \\
 & -x^2y^3+y \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\
 & & xy^4+y
\end{tikzcd}
$$

Le polynôme f se réduit modulo F sous les trois formes normales xy^2+y, $-y^3+y$ et xy^4+y.

2. Pour l'ordre lexicographique inverse, $\mathrm{lt}(f_1) = yx^2$ et $\mathrm{lt}(f_2) = yx$. Avec cet ordre on a $yx^2 \xrightarrow{f_1} y$, $yx \xrightarrow{f_2} -x^2$ et

$$
\begin{tikzcd}
 & y^2x+y \arrow[dr, "f_2"] & & 0 \\
f = y^2x^3+y \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & -yx^2+y \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & y+x^3 \\
 & -yx^4+y \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & y+x^5 &
\end{tikzcd}
$$

Le polynôme f se réduit alors modulo F sous les trois formes normales 0, $y+x^3$ et $y+x^5$.

3. Avec l'ordre lexicographique inverse on a la réduction $f \xrightarrow{F} 0$, donc $f \in I$.
En prenant le premier chemin de réduction, on obtient

$$f = (yx-1)f_1 + yf_2.$$

On a également

$$f = yx^2f_2 - (x^2+1)f_1.$$