Suites de fonctions

Exercice 1. Convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme des deux suites de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

1. $\forall n \geq 1, f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$
2. $\forall n \geq 1, g_n(x) = \frac{n}{1+(x+1)n}$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Autre outil pour la convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall n \geq 0, \forall \alpha \geq 0, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Convergence uniforme et dérivation

1. Soit la suite de fonction $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f dérivable et constater que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.
2. Soit $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

   Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. Convergence uniforme sur un ouvert

On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Convergence simple vers une fonction discontinue

Etudier la convergence, éventuellement uniforme, des suites de fonctions définies par :

a) $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$

b) $g_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $g_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

c) $h_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $h_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6. Un cas pathologique

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonction définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ nx & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{pour } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Faire une figure pour quelques valeurs de n.
2. Déterminer la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers l'infini.
3. Préciser si la convergence est uniforme dans les trois cas suivants :
   - Sur $]-\infty, 0[$.
   - Sur un segment contenant l'origine.
   - Sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Convergence uniforme et intégration

Soit $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer :

$$\int_0^1 f_n(t)dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. On considère la suite de fonctions réelle définies par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan(x), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur $[0,1]$?
2. Uniformément convergente sur $]0,1]$?
3. Uniformément convergente sur $[a, 1]$ ($a \in]0,1[$) ?
4. Uniformément convergente sur $[1, +\infty[$?

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. On considère la suite de fonctions réelles définies par

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur $[0,1]$?
2. Uniformément convergente sur $]0,1]$?
3. Uniformément convergente sur $[a, 1]$ ($a \in]0,1[$) ?
4. Uniformément convergente sur $[1, +\infty[$?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\, e^{-nx^2}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall a \in]0,1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$$

1. Etudier la converge simple de cette suite sur $[0,1]$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer

$$I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$$

Et la limite de I_n lorsque $n\to+\infty$.

3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Etudier la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par

$$g_n(x)=\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n: [0,1]\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto x+\frac{x}{1+x}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{(1+x)^k}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n: \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x\in[0,n]\\ 0 & \text{si} \quad x>n\end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 14

Corrections

Correction exercice 1.

1.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = e^{-x}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f: x \to e^{-x}$

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = \frac{e^{-x}(n+x) - (ne^{-x} + x^2)}{n+x} = \frac{xe^{-x} - x^2}{n+x} = \frac{x(e^{-x} - x)}{n+x}$$

Soit on essaye de calculer le sup de la valeur absolue de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$, ce qui ne s'annonce pas joyeux parce que la principale méthode est d'étudier la fonction, ou bien on cherche à majorer la valeur absolue de cette différence par une expression ne faisant plus apparaître de « x » en sachant que $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{x(e^{-x} - x)}{n+x}\right| \le \left|\frac{e^{-x} - x}{n+x}\right|$$

Car $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \le \left|\frac{e^{-x} - x}{n+x}\right| \le \frac{|e^{-x}| + |-x|}{|n+x|} = \frac{e^{-x} + x}{n+x} \le \frac{1+1}{n+0} = \frac{2}{n}$$

Car $e^{-x} \le 1$ et $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n+0}$

On en déduit que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \le \frac{2}{n} \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \to e^{-x}$.

Allez à : Exercice 1

2.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1 + n(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \to \frac{1}{x+1}$

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1 + n(x+1) - n(x+1)}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)} = \frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)}$$

Aucune majoration claire en vue, on va étudier (en vain ou presque) la fonction $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)} = \frac{1}{x+1+n(x+1)^2} > 0$$

$$g_n'(x) = -\frac{1 + 2n(x+1)}{(+1 + n(x+1)^2)^2}$$

Cette fonction s'annule pour

$$x_n = -\frac{1}{2n} - 1 = -\frac{2n+1}{2n}$$

Soit

$$x_n + 1 = -\frac{1}{2n}$$

Le maximum de cette fonction est donc en $x_n = -\frac{2n+1}{2n}$ et vaut

$$g_n(x_n)=\frac{1}{x_n+1+n(x_n+1)^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2n}+n\left(-\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}}=\frac{1}{\frac{1}{4n}}=4n$$

Le maximum tend vers l'infini et donc il n'y a pas de convergence uniforme.

Si on n'a rien vu c'est parfait, sinon

$$g_n(x)=\frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)}=\frac{1}{x+1+n(x+1)^2}$$

Donc

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{n+1}{1+\frac{n}{n+1}}\to+\infty$$

Comme

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}g_n(x)\geq g_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\to+\infty$$

Cela montre qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Si $x>0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le n^α

Si $x=0$ alors $f_n(0)=0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de $|f_n-\Theta_{\mathbb{R}^+}|=f_n$ sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}-n^{\alpha+1}xe^{-nx}=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$$

La dérivée est positive pour $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right[$, nulle en $\frac{1}{n}$ et négative pour $x\in\left]\frac{1}{n},+\infty\right[$

Donc f_n admet un maximum en $x_n=\frac{1}{n}$

$$f_n(x_n)=n^\alpha\frac{1}{n}\,e^{-\frac{n}{n}}=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Si $\alpha\geq 1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)-\Theta_{\mathbb{R}^+}(x)|=f_n(x_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Ne tend pas vers 0 donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Si $\alpha<1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)-\Theta_{\mathbb{R}^+}(x)|=f_n(x_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}\to 0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cette fonction est évidemment dérivable.

$$f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cos(nx)$$

Sauf pour $x = 0$ la suite (f_n') n'a pas de limite.

Allez à : Exercice 3

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La limite simple est $f(x) = |x|$

Puis on cherche à montrer qu'il y a convergence uniforme

$$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \le \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}} + 0} = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$$

Par conséquent

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| \le \frac{1}{n}$$

Et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = 0$$

La suite de fonction (f_n) converge uniformément vers $f(x) = |x|$, fonction qui n'est pas dérivable en 0 donc qui n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

Si $x > 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le n^α

Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de f_n sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x) = ne^{-nx}\cos(nx) - ne^{-nx}\sin(nx) = ne^{-nx}\cos(nx)\left(1 - \tan(nx)\right)$$

Là on voit que l'on ne va pas s'en sortir, alors que

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(1)$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - \Theta_{\mathbb{R}^+}(x)| \le f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(1) \neq 0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Sur $[a, +\infty[$, la suite de fonctions converge simplement vers $\Theta_{[a,+\infty[}$

Comme sur $\mathbb{R}^+$ l'étude de la fonction ne va rien donner mais une simple majoration va nous permettre de conclure

$$\left|f_n(x) - \Theta_{[a,+\infty[}(x)\right| = e^{-nx}|\sin(nx)| \le e^{-nx} \le e^{-na}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} \left|f_n(x) - \Theta_{[a,+\infty[}(x)\right| \le e^{-na} \to 0$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[a,+\infty[}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

a) Si $x \in [0,1[$ alors x^n tend vers 0 et si $x = 1$ alors $x^n = 1$, ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (f_n) convergeait uniformément vers f alors f serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

b) Si $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{nx+1} = 1$$

Si $x = 0$ alors $g_n(0) = 0$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (g_n) convergeait uniformément vers g alors g serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

c) Si $x \neq 0$ alors $1 + x^2 > 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$$

Si $x = 0$ alors $h_n(0) = 1$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction h définie par

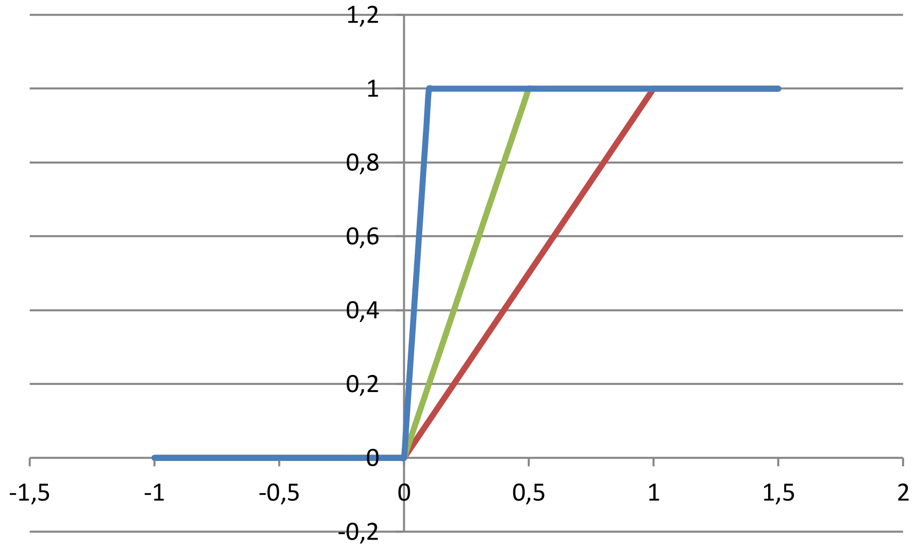
$$h(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (h_n) convergeait uniformément vers h alors h serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.



Courbes pour $n=1, n=2$ et $n=10$

2.

Si $x\leq 0$, $f_n(x)=0\to 0$

Si $x>0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0}<x$ et pour tout $n\geq n_0$ $f_n(x)=1\to 1$

Donc la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\leq 0\\ 1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

3. Sur $]-\infty,0[$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{]-\infty,0[}$

Comme

$$f_n(x)-\Theta_{]-\infty,0[}(x)=0$$

La convergence est uniforme

Sur un segment contenant l'origine la suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction qui est nulle si $x\leq 0$ et qui vaut 1 pour $x>0$, c'est-à-dire une fonction discontinue or les fonctions f_n sont continues, en $x=0$ les limites à gauche et à droite valent 0 et en $x=1$ les limites à gauche et à droite valent 1, il n'y a pas convergence uniforme.

Sur $[a,+\infty[$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 pour tout $x\geq a$

Comme

$$f_n(x)-f(x)=1-1=0$$

Il y a convergence uniforme.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Pour $x \in]0,1]$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$, alors pour tout $n \geq n_0$ $f_n(x) = 0 \to 0$

   Pour $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$

   Donc la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$.

2.
$$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t(1-nt)dt = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (t - nt^2)dt = n^2 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{nt^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{n}{3n^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

   S'il y avait convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) on aurait
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(t)dt = 0$$
   Ce qui n'est pas le cas, donc il n'y a pas de convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers $\Theta_{[0,1]}$.

3. Sur $[a,1]$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[a,1]}$, pour tout $n > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{n}$, et pour tout $x \in [a,1]$, $f_n(x) = 0$ donc
$$f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x) = 0$$
   Donc il y a convergence uniforme.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Pour tout $x \in [0,1]$
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\arctan$ sur $[0,1]$.

2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\arctan$ sur $]0,1]$.
$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$
   On peut étudier cette fonction $(x \to \frac{x}{x+n})$ sur $]0,1]$, on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour $x = 1$ et alors
$$\sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \to 0$$
   Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $]0,1]$

   Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les « x »
$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$
   Ainsi
$$\sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$$
   Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $]0,1]$

3. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $[a,1]$ vers $\arctan$ sur $[a,1]$.

   On peut faire les deux raisonnements de la question ci-dessus
$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

On peut étudier cette fonction ($x \to \frac{x}{x+n}$) sur $[a,1]$, on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour $x = 1$ et alors

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \to 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$

Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les « x », attention ici, il y a une petite nuance

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{a+n}$$

Mais on aurait aussi pu majorer par $\frac{1}{n}$.

Ainsi

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{a+n} \to 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$

4. Pour tout $x \in [1,+\infty[$
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction arctan sur $[1,+\infty[$.
$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$
Là, on va avoir un problème pour majorer cette expression indépendamment de x par une expression qui tend vers 0.
Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme, prenons $x_n = n$
$$\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - \arctan(x)| \geq |f_n(x_n) - \arctan(x_n)| = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$
Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Pour tout $x \in]0,1]$
$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 1$$
Il faut bien distinguer le cas $x \neq 0$ (c'est la limite des termes de plus haut degré) et le cas où $x = 0$, auquel cas $g_n(0) = 1$
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction g constante à 1 sur $[0,1]$
2.
$$|g(x) - g_n(x)| = \left|1 - \frac{nx}{1+nx}\right| = \left|\frac{1+nx-nx}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+nx}$$
Etude de la fonction $x \to \frac{1}{1+nx}$ sur $]0,1]$, sa dérivée est $-\frac{n}{(1+nx)^2} < 0$ la fonction est décroissante, donc
$$\sup_{x\in]0,1]} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$
Cette expression ne tend pas vers 0 donc il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,1]$.
Autre méthode
$$\sup_{x\in]0,1]} |g(x) - g_n(x)| \geq \left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$
Donc le sup ne peut pas tendre vers 0 et il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,1]$

3. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction constante égal à 1. Reprenons l'étude de la fonction

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour $x = a$

$$\sup_{x\in[a,1]} |g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + na} \to 0$$

Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) vers la fonction constante égal à 1.

4. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction constante égal à 1 sur $[1, +\infty[$.
Reprenons l'étude de la fonction

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour $x = 1$

$$\sup_{x\in[a,1]} |g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + n} \to 0$$

Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) vers la fonction constante égal à 1 sur $[1, +\infty[$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour tout $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$

2. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$, l'étude de la fonction n'a rien de réjouissant à priori, prenons la suite $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - \Theta_{[0,1]}(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} |\sin(nx^2)|e^{-nx^2} \geq |\sin(nx_n^2)|e^{-nx_n^2} = |\sin(1)|e^{-1}$$

Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.

3. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[a,1]}$,

$$\left|f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x)\right| = |\sin(nx^2)|e^{-nx^2} \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,1]} \left|f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x)\right| \leq e^{-na^2} \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[a,1]}$ sur $[a, 1]$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Pour tout $x \in]0,1]$

$$\frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} \sim \frac{2^n x}{2^n n x^2} = \frac{1}{nx} \to 0$$
$$f_n(0) = 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$ sur $[0,1]$

2.

$$I_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} dx = \left[\frac{1}{n}\ln(1 + 2^n n x^2)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n}\ln(1 + 2^n n)$$
$$= \frac{1}{n}\ln\left(2^n(2^{-n} + n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln(2^n) + \ln(2^{-n} + n)\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(n\ln(2) + \ln(2^{-n} + n)\right)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln(2^{-n} + n)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln\left(n\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)\right)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln(n) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)$$
$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right) \sim \frac{1}{n} \times \frac{2^{-n}}{n} \to 0$$
$$\frac{\ln(n)}{n} \to 0$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln(2)$$

3. Si la suite de fonctions (f_n) convergeait uniformément vers $\Theta_{[0,1]}$ on aurait
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(x)dx = 0$$
Ce qui n'est pas le cas donc la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Avant la convergence uniforme il faut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$. $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour tout $x \neq 0$ la limite de $f_n(x)$ est bien nulle, tout va bien.
On ne voit pas de majorations simple qui permettrait de majorer $|f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)|$ par une expression indépendante de x qui tendrait vers 0, on va donc étudier la fonction
$$h_n(x) = |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2}$$
La fonction étant paire, on va faire l'étude sur $[0,1]$ ainsi on se débarrasse de la valeur absolue.
$$h_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$
$$h_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - x \times 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

On en déduit que le sup de
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{1}{2n} \to 0$$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[-1,1]}$ sur $[-1,1]$.

2. En réutilisant le calcul ci-dessus
$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$
Pour tout $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2x^2}{(n^2x^2)^2} = 0$$

Pour $x = 0$, $f_n'(0) = 1$ donc la suite de fonctions (f_n') converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui permet de dire que la convergence de la suite de fonctions continues (f_n') ne converge pas uniformément sinon la limite simple serait continue ce qui n'est pas le cas.

3. Calculons $g_n'(x)$, pour voir.

$$g_n'(x) = \frac{1}{2n^2} \times \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \frac{x}{1+n^2x^2} = f_n(x)$$

Ah bah çà alors quelle surprise !!!!

La suite de fonctions (g_n') converge uniformément sur $[-1,1]$. Pour $x_0 = 0$ $g_n(0) = 0$ donc la suite de terme général $g_n(x_0)$ converge simplement car la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$, on en déduit d'après le théorème de dérivation que la suite de terme général (g_n) converge uniformément vers $\Theta_{[-1,1]}$.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

$$f_n(x) = x\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^k$$

Si $\frac{1}{1+x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ alors

$$f_n(x) = x\frac{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x}} = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right)\frac{x(1+x)}{1-(1+x)} = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right)\frac{x(1+x)}{-x}$$

$$= 1+x-\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

Comme $1 + x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1+x$$

Si $x = 0$

$$f_n(0) = 0 \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues, si la convergence était uniforme la fonction f serait continue or f n'est pas continue en $x = 0$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

Convergence simple

Pour tout x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > x$ donc pour tout $n > n_0$, $x \in [0, n]$, il faut donc trouver la limite lorsque n tend vers l'infini de $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x+o(1)} \to e^{-x}$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-x}$

Convergence uniforme

$$\forall x \in [0,n[, f(x) - f_n(x) = e^{-x} - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{-x}\left(1 - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+x}\right)$$

On pose

$$g_n(x) = n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$$

$$g_n'(x) = n \times \frac{-\frac{1}{n}}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{-\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} = \frac{-x}{n-x} < 0$$

x	0	n
$g_n'(x)$	$-$	
$g_n(x)$	$0 \searrow$	$-\infty$

Donc pour tout $x \in [0,n[$, $g_n(x) \leq 0$, ce qui montre que

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x}\left(1 - e^{g_n(x)}\right) \geq 0$$

On pourrait se passer d'avoir montré cela.

On pose $h_n(x) = f(x) - f_n(x)$ et on va chercher les extrémums de cette fonction continue et dérivable sur le fermé borné $[0,n]$, ces extrémums sont soient sur les bords en $h_n(0) = f(0) - f_n(0) = 1 - 1 = 0$, c'est un minimum, soit en $x = n$, $h_n(n) = f(n) - f_n(n) = e^{-n}$, soit en un point où la dérivée est nulle.

$$h_n'(x) = -e^{-x} - n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

Supposons qu'il existe $x_n \in [0,n]$ (ce qui impose que $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq 1$ tel que $h_n'(x_n) = 0$, rien n'est moins sûr, il se peut que ce x_n n'existe pas (par exemple si $h_n'(x)$ garde un signe constant) soit que ce x_n soit supérieur à n, mais peu importe.

$$h_n'(x_n) = 0 \Leftrightarrow -e_n^{-x_n} + \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow e_n^{-x_n} = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$$

Puis calculons $h_n(x_n)$

$$h_n(x_n) = f(x_n) - f_n(x_n) = e_n^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) = \frac{x_n}{n}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$$

Deux cas se présentent

- Soit

$$0 \leq 1 - \frac{x_n}{n} \leq M < 1 \Leftrightarrow 1 - M < \frac{x_n}{n} < M$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} h_n(x_n) = 0$$

- Soit

$$1 - \frac{x_n}{n} \to 1 \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} \to 0$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0$$

Dans tous les cas, que x_n existe ou pas le maximum éventuel tend vers 0

Et pour tout $x \geq n$, comme $f_n(x) = 0$

$$|f(x) - f_n(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$$

Finalement

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f(x) - f_n(x)| = \max\left(h_n(x_n), e^{-n}\right) \to 0$$

Allez à : Exercice 14