# Polynômes

Exercice 1.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $P = 1 - X^8$

Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ et enfin dans $\mathbb{Q}[X]$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $1 + j = -j^2$
2. Montrer que $j$ est une racine multiple de $P$.
3. Trouver deux racines réelles évidentes de $P$.
4. Factoriser $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit $P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

1. Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser $P$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

1. Déterminer les racines de $P$.
2. Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = -X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Soit $P = -X^3 + X^2 - X + 1$ un polynôme.
   Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit
$$P = 1 - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$$
   Déterminer les racines réelles et complexes de $P$.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme
$$P(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$
Indication : $P(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $P = X^4 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est une racine multiple de $P$.
2. En déduire la factorisation de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$
On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $j$ est une racine multiple de $P$.
2. Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par
$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

1. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de $P$.
2. En remarquant que $P$ est un polynôme pair, donner toutes les racines de $P$ ainsi que leur multiplicité.
3. Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$

1. Montrer que $j$ est une racine double de $P$
2. Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

1. Déterminer les racines réelles et complexes de $(X+1)^6 - X^6$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par
$$P = (X+1)^7 - X^7 - a$$
Déterminer $a$ pour que $P$ admette une racine réelle multiple.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

1. Le polynôme $A = X^4 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ?
2. Le polynôme $B = X^3 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ?

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ soit factorisable par
$$Q = (X^2 - 1)(X - 3)$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $B = X^2 - X + 1$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit
$$P_n = (X+1)^n - X^n - 1$$
On pose $n \equiv a \quad [6]$ avec $a \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Pour quelles valeurs de $n$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est-il racine de $P_n$ ?

On pourra discuter selon les valeurs de $a$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par $X^2 + 1$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Quel est le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X + 1$ par $Q = (X-1)^2$ ?

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Quelle est le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^2$

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par $(X-1)^2$.

Déterminer $R$.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Quel est le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n + X + b$ par $B = (X-a)^2$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $B = X^2 + 1$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$.
2. En déduire que le polynôme $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ avec $a$, $b$, $c$ et $d$ entiers naturels est divisible par $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

On pose $P(X) = X^3 - 63X + 162$

Sachant que l'une des racines de ce polynôme est le double d'une autre racine, trouver les trois racines de $P$.

Indication : On pourra utiliser les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ ses racines.

1. Calculer $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
3. Calculer $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$.
4. On pose $D = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3$

   Calculer $D$ en fonction de $p$.

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$

On rappelle les relations entre les racines ($\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$) et les coefficients d'un polynôme unitaire de degré 4 : $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

$$(*)\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -c \\ \alpha\beta\gamma\delta = d \end{cases}$$

1. Résoudre

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

2. Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$

   Ecrire le système $(*)$ pour ce polynôme et on appellera $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ ses racines
3. Sachant que $\alpha\beta = 6$ trouver toutes les racines de $P$
4. En déduire la factorisation de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de $P$.
2. Soit $a$ une racine de $P$. Si $a \neq 0$, montrer que $a - 1$ est racine. Si $a \neq 1$, montrer que $a + 1$ est racine.
3. On suppose que $P$ n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de $P$.

Indication :

S'il existe une racine $a$ telle que $\mathcal{Re}(a) < 1$ différente de 0 ($a \neq 0$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine $a$ telle que $\mathcal{Re}(a) > 0$ différente de 1 ($a \neq 1$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

4. En déduire que $P$ est de la forme $\alpha X^k (X-1)^l$ avec $\alpha \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$.
5. Quel est l'ensemble des polynômes de $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Effectuer la division suivante les puissances croissantes de $X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$ à l'ordre 2.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

1. Calculer le PGCD de $P$ et $P'$.
2. Quelles sont les racines communes à $P$ et $P'$ ?
   Quelles sont les racines multiples de $P$ dans $\mathbb{C}$ ?
3. Montrer que $(X^2+1)^2$ divise $P$.
4. Factoriser $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on désigne par $P(X+1)$ le polynôme obtenu en remplaçant $X$ par $X+1$ dans $P$.

1. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P(0) = 1$ ?
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré 3, quel est le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ ?
3. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré trois qui vérifient :

$$P(X+1) - P(X) = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 1$$

(Indication : On pourra dériver le polynôme $P$ dans l'équation ci-dessus.)

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34. (Hors programme)

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes définis par :

$P(X) = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ et $Q(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$

Déterminer le PGCD de $P$ et $Q$ et en déduire les racines communes de $P$ et $Q$ ainsi que leur multiplicité.

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$.

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$

On pose $Y = X + \frac{1}{X}$

1. Montrer qu'il existe un polynôme $Q$, de degré 2 tel que $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de $Q$.
3. En déduire les racines de $P$, puis la factorisatistion de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\sin(n\theta) \neq 0$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Allez à : Correction exercice 37

# CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = -(X^8 - 2X^4 + 1) = -(X^4 - 1)^2 = -(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2 = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2$$

Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Première méthode

$P(X) = 1 - X^8 = (1 - X^4)(1 + X^4)$, $(1 - X^4)$ se décompose facilement en $(1 - X)(1 + X)(i - X)(i + X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)$, mais pour décomposer $1 + X^4$, c'est beaucoup plus délicat, il faut utiliser une bonne ruse, allons-y

$$1 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4 - 2X^2 = (1 + X^2)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 = \left(1 + X^2 - \sqrt{2}X\right)\left(1 + X^2 + \sqrt{2}X\right)$$

$1 + X^2 - \sqrt{2}X = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $1 + X^2 + \sqrt{2}X = X^2 + \sqrt{2}X + 1$ sont deux polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car leur discriminant sont négatifs. Donc la décomposition de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^2 + 1)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ il suffit de trouver les racines complexes de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $X^2 + \sqrt{2}X + 1$

Le discriminant de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$, ses racines sont $X_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Le discriminant de $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$, ses racines sont $X_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$ et $X_4 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$.

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)\left(X - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de $1 - X^8 = 0$

$X^8 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}}$ avec $k \in \{0,1; 2,3,4,5,6,7\}$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4 = e^{i\pi} = -1$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=-(X-1)\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X-i)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X+1)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X+i)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les conjugués

$$P(X)=-(X-1)(1+X)(X-i)(X+i)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$P(X)=-(X-1)(1+X)(X^2+1)\left(X^2-\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X+e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X^2-\left(e^{-3i\frac{\pi}{4}}+e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)X+e^{-3i\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=-(X-1)(X+1)(X^2+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X+1\right)$$

$$=-(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2-2\frac{\sqrt{2}}{2}X+1\right)\left(X^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}X+1\right)$$

$$=-(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)$$

Dans $\mathbb{Q}[X]$ on regroupe les deux derniers polynômes

$$P(X)=-(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)$$

$$=-(X-1)(X+1)(1+X^2)\left((X^2+1)^2-\left(\sqrt{2}X\right)^2\right)$$

$$=-(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^4+1)$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$1+j=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=-j^2$$

Ou mieux

$$1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=0$$

Car $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$.

2.

$$P(j)=(j+1)^7-j^7-1=(-j^2)^7-j^6j-1=-j^{14}-j-1-j^{12}j^2-j-1=-(j^2+j+1)=0$$

$$P'=7(X+1)^6-7X^6$$

$$P'(j)=7\left((j+1)^6-j^6\right)=7\left((-j^2)^6-1\right)=7(j^{12}-1)=7(1-1)=0$$

Donc $j$ est au moins racine double.

3. $P(0)=(0+1)^7-0^7-1=1^7-1=0$ et $P(-1)=(-1+1)^7-(-1)^7-1=0-(-1)-1=0$
Donc $0$ et $-1$ sont deux racines évidentes.
4. Le début de la formule du binôme de $(X+1)^7$ est $X^7+7X^6$ (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc $P$ est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.
D'autre part, $j$ est racine double (au moins) donc $\bar{j}=j^2$ est aussi racine double (au moins) car $P$ est un polynôme à coefficients réels. $0$ et $-1$ sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d^\circ P=6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P=7X(X+1)(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$ :

$$(X-j)\left(X-\bar{j}\right)=(X-j)(X-j^2)=X^2-(j+j^2)X+j^3=X^2+X+1$$

Donc

$$P=7X(X+1)\left((X-j)\left(X-\bar{j}\right)\right)^2=7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$P(X)=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-X^6}{1-X}=0\\X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-X^6=0\\X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^6=1\\X\neq 1\end{cases}$$

Or $X^6=1\Leftrightarrow X_k=e^{\frac{2ik\pi}{6}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k\in\{0,1;2,3,4,5\}$

Ce qui donne $X_0=1$, $X_1=e^{\frac{i\pi}{3}}=-\bar{j}=-j^2$, $X_2=e^{\frac{2i\pi}{3}}=j$, $X_3=e^{i\pi}=-1$, $X_4=e^{\frac{4i\pi}{3}}=j^2$, $X_5=e^{\frac{5i\pi}{3}}=-j$

Les 5 racines de $P$ sont $X_1=-j^2$, $X_2=j$, $X_3=-1$, $X_4=j^2$ et $X_5=-j$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=1\times(X+j^2)(X-j)(X+1)(X-j^2)(X+j)=(X+j^2)(X-j)(X+1)(X-j^2)(X+j)$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\begin{aligned}P(X)&=(X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j^2)(X+j)=(X+1)(X^2-(j+j^2)X+j^3)(X^2+(j+j^2)X+j^3)\\&=(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$$P=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7=\frac{1-X^8}{1-X}$$

Pour $X\neq 1$

Les racines de $P$ vérifient $\begin{cases}X^8=1\\X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X_k=e^{\frac{2ik\pi}{8}},\ \ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\\X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow X_k=e^{\frac{ik\pi}{4}},\ \ k\in$ $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$X_1=e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2=e^{\frac{i\pi}{2}}=i$, $X_3=e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4=e^{i\pi}=-1$, $X_5=e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6=e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i$ et $X_7=e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc

$$P=\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X-i)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X+1)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X+i)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2. On rappelle que

$$\left(X-e^{i\theta}\right)\left(X-e^{-i\theta}\right)=X^2-2\cos(\theta)+1$$

$$\begin{aligned}P&=(X+1)(X-i)(X+i)\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)\\&=(X+1)(X^2+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X+1\right)\\&=(X+1)(X^2+1)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}P&=(X+1)(X^2+1)\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)=(X+1)(X^2+1)\left((X^2+1)^2-\left(\sqrt{2}X\right)^2\right)\\&=(X+1)(X^2+1)(X^4+2X^2+1-2X^2)=(X+1)(X^2+1)(X^4+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$P(X)=1+\left(\frac{X}{2}\right)+\left(\frac{X}{2}\right)^2+\left(\frac{X}{2}\right)^3+\left(\frac{X}{2}\right)^4+\left(\frac{X}{2}\right)^5=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-\left(\frac{X}{2}\right)^6}{1-\frac{X}{2}}=0\\\dfrac{X}{2}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\left(\frac{X}{2}\right)^6=0\\X\neq 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{X}{2}\right)^6=1\\X\neq 2\end{cases}$$

Or $\left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = 2e^{\frac{2ik\pi}{6}} = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ donc $X_k = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$

Ce qui donne $X_0 = 2,\ X_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = -2\bar{j} = -2j^2,\ X_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j,\ X_3 = 2e^{i\pi} = -2,\ X_4 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2j^2, X_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = -2j$

Les 5 racines de $P$ sont $X_1 = -2j^2, X_2 = 2j, X_3 = -2, X_4 = 2j^2$ et $X_5 = -2j$. On a enlevé $X = 2$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = \frac{1}{32} \times (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j)$$
$$= (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j)$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32}(X + 2)(X - 2j)(X - 2j^2)(X + 2j^2)(X + 2j) \\ &= \frac{1}{32}(X + 2)(X^2 - 2(j + j^2)X + 4j^3)(X^2 + 2(j + j^2)X + 4j^3) \\ &= \frac{1}{32}(X + 1)(X^2 + 2X + 4)(X^2 - 2X + 4) \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$P = 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 = \frac{1 - (-X)^5}{1 - (-X)} = \frac{1 + X^5}{1 + X}$$

Pour $X \neq -1$

Les racines vérifient

$$\begin{cases} X^5 = -1 \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |X^5| = |-1| \\ \arg(X^5) = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ 5\arg(X) = (2k + 1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ X \neq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \dfrac{2k + 1}{5}\pi,\ \ k \in \{0,1,2,3,4\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\} \\ X \neq -1 \end{cases}$$

$$X_0 = e^{\frac{i\pi}{5}}; X_1 = e^{\frac{3i\pi}{5}}; X_2 = e^{\frac{5i\pi}{5}} = -1; X_3 = e^{\frac{7i\pi}{5}} = e^{\frac{-3i\pi}{5}}; X_4 = e^{\frac{-i\pi}{5}}$$

On élimine $X_3 = -1$

2. Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$$P = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 = 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 + (-X)^5 = \frac{1 - (-X)^6}{1 - (-X)}$$
$$= \frac{1 - X^6}{1 + X}$$

Pour $X \neq -1$

$$P=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X^6=1\\X\neq -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X=e^{\frac{2ik\pi}{6}}\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}\\X\neq -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X=e^{\frac{ik\pi}{3}}\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}\\X\neq -1\end{array}\right.\Leftrightarrow X=e^{\frac{ik\pi}{3}}\quad k\in\{0,1,2,4,5\}$$

Car pour $k=3$, $X_3=e^{i\pi}=-1$

Ce polynôme admet cinq racines

$$X_0=e^0=1;X_1=e^{\frac{i\pi}{3}};X_2=e^{\frac{2i\pi}{3}};X_4=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\overline{X_2}\quad\text{et}\quad X_5=e^{\frac{5i\pi}{3}}=\overline{X_1}$$

Donc la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=-(X-1)\left(X-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

Le signe $-$ vient du coefficient devant le terme de plus haut degré dans $P$.

Et dans $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{aligned}P&=-(X-1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X+1\right)\\&=-(X-1)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. $P=X^2(-X+1)+(-X+1)=-(X-1)(X^2+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$
   $P=-(X-1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. Si $X\neq -1$.

$$P=\sum_{k=0}^{2n-1}(-X)^k=\frac{1-(-X)^{(n+1)}}{1-(-X)}=\frac{1-(-X)^{n+1}}{1+X}$$

Les racines de $P$ vérifie $X^{(n+1)}=1$ et $X\neq -1$.

$$P(X)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(-X)^{n+1}=1\\X\neq -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-X=e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}\\X\neq -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X=-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}\\X\neq -1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow X=-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{1,\dots,n\}$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

Pour $X^2\neq 1$

$$P(X)=1+X^2+(X^2)^2+(X^2)^3=\frac{1-(X^2)^4}{1-X^2}=\frac{1-X^8}{1-X^2}$$

$$P(X)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X^8=1\\X^2\neq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X=e^{\frac{2ik\pi}{8}},\ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\\X\neq\pm 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}X=e^{\frac{ik\pi}{4}},\ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\\X\neq\pm 1\end{array}\right.\Leftrightarrow X=e^{\frac{ik\pi}{4}},k\in\{1,2,3,5,6,7\}$$

Car pour $k=0$, $e^{\frac{ik\pi}{4}}=1$ et pour $k=4$, $e^{\frac{ik\pi}{4}}=e^{i\pi}=-1$

Les racines de $P$ sont :

$$X_1=e^{\frac{i\pi}{4}};X_2=e^{\frac{2i\pi}{4}}=i;X_3=e^{\frac{3i\pi}{4}};X_5=e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}};X_6=e^{\frac{6i\pi}{4}}=-i\ \ et\ \ X_7=e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)(X-i)(X+i)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

Et dans $\mathbb{R}[X]$ :

$$\begin{aligned}P(X)&=\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)(X^2+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X+1\right)\\&=\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)(X^2+1)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1+1-6+4}{16}=0$$

$$P'=4X^3+\frac{1}{2}X-\frac{3}{4}$$

$$P'\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$$

Donc $\frac{1}{2}$ est au moins racine double (par conséquent racine multiple).

2. D'après la question précédente $P$ est divisible par $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2=X^2-X+\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{l|l}
X^4 \qquad +\frac{1}{4}X^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{4} & X^2-X+\frac{1}{4} \\ \cline{2-2}
X^4-X^3+\frac{1}{4}X^2 & X^2+X+1 \\ \cline{1-1}
\qquad X^3 \qquad -\frac{3}{4}X+\frac{1}{4} & \\
\qquad X^3-X^2 \quad +\frac{1}{4}X & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad X^2-X+\frac{1}{4} & \\
\qquad\qquad X^2-X+\frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Par conséquent

$$P=\left(X^2-X+\frac{1}{4}\right)(X^2+X+1)=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2(X^2+X+1)$$

Comme le discriminant de $X^2+X+1$ est strictement négatif, il s'agit de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$
Les deux racines de $X^2+X+1$ sont bien connues, il s'agit de $j$ et $j^2$ (où alors on les recalcule), ce qui entraine que la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2(X-j)(X-j^2)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1.

$$\begin{aligned}P(j)&=j^6+2j^5+4j^4+4j^3+4j^2+2j+1=1+2j^2+4j+4+4j^2+2j+1=6j^2+6j+6\\&=6(j^2+j+1)=0\end{aligned}$$

$$P'=6X^5+10X^4+16X^3+12X^2+8X+2$$

$$\begin{aligned}P'(j)&=6j^5+10j^4+16j^3+12j^2+8j+2=6j^2+10j+16+12j^2+8j+2=18j^2+18j+18\\&=18(j^2+j+1)=0\end{aligned}$$

Donc $j$ est racine double, comme $P$ est un polynôme à coefficients réels, $\overline{j}$ est aussi racine double.
On peut essayer de voir si $j$ ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on a l'intuition de voir que $i$ est racine (et que donc $-i$ est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser $P$ par

$$\begin{aligned}(X-j)^2\left(X-\overline{j}\right)^2&=\left((X-j)\left(X-\overline{j}\right)\right)^2=(X^2+X+1)^2=X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X\\&=X^4+2X^3+3X^2+2X+1\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
X^6+2X^5+4X^4+4X^3+4X^2+2X+1 & X^4+2X^3+3X^2+2X+1 \\ \cline{2-2}
X^6+2X^5+3X^4+2X^3+X^2 \qquad\qquad & X^2+1 \\ \hline
X^4+2X^3+3X^2+2X+1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|} X^4+2X^3+3X^2+2X+1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$P=(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2(X-i)(X+i)$$

3.

$$P=(X^2+X+1)^2(X^2+1)$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.

$$P(j)=j^8+2X^6+3j^4+2j^2+1=j^2+2+3j+2j^2+1=3j^2+3j+3=3(j^2+j+1)=0$$

$j$ est une racine de $P$

$$P'=8X^7+12X^5+12X^3+4X$$

$$P'(j)=8j^7+12j^5+12j^3+4j=8j+12j^2+12+4j=12j^2+12j+12=12(j^2+j+1)=0$$

$j$ est racine au moins double, $j$ est donc une racine multiple.

2. Comme $P$ est pair, $-j$ est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc $\bar{j}=j^2$ est racine double et $\overline{-j}=-j^2$ est aussi racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=(X-j)^2(X-j^2)^2(X+j)^2(X+j^2)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P=[(X-j)(X-j^2)]^2[(X+j)(X+j^2)]^2=[X^2+X+1]^2[X^2-X+1]^2$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1.

$$P(j)=2j^3+3j^2+6j+1+3j=2+3j^2+6j+1-3j=3j^2+3j+3=3(j^2+j+1)=0$$

$$P'=6X^2+6X+6$$

$$P'(j)=6j^2+6j+6=6(j^2+j+1)=0$$

Donc $j$ est une racine double de $P$.

2. La somme des racines de $P$ est $-\frac{3}{2}$, si on appelle $\alpha$ la troisième racine on a

$$\alpha+2j=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}-2j=-\frac{3}{2}-2\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}$$

Donc

$$P=2(X-j)^2\left(X+\frac{1}{2}-i\sqrt{3}\right)$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1.

$$(X+1)^6=X^6\Leftrightarrow\left(\frac{X+1}{X}\right)^6=1$$

Il est clair que 0 n'est pas racine. Mais attention $(X+1)^6-X^6$ est un polynôme de degré 5

$$(X+1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X}\right)^6 = 1$$

$$\frac{X+1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

La racine « en trop » est celle qui aurait vérifié $\frac{X+1}{X} = 1$ qui n'a pas de solution, on enlève donc $k = 0$.

$$1 + \frac{1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1, \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \Leftrightarrow X = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1}, k \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)}, k \in \{1,2,3,4,5\}$$

Les cinq racines sont

$$X_k = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

2. Pour que $P$ admette une racine multiple réelle (donc au moins double), $P$ et $P'$ ont une racine réelle commune.

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

Les racines réelles et complexes de $P'$ vérifient $(X+1)^6 - X^6 = 0$

On cherche les racines réelles donc $\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$ ce qui équivaut à $k = 0$ (mais on a éliminé ce cas) et $k = 3$

$$X_3 = \frac{\cos(\pi) - 1}{2 - 2\cos(\pi)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$P$ admet une racine double si et seulement si $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \times \frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^6}$$

Et alors

$$P = (X+1)^7 - X^7 - \frac{1}{2^6}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.
2. Les limites de la fonction polynômiale définie par $B(x) = x^3 + 3x + 1$ en $-\infty$ vaut $-\infty$ et en $+\infty$ vaut $+\infty$, cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraine qu'il existe $x_0$ tel que $B(x_0) = 0$. $B$ admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

$P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ est factorisable par $Q = (X^2-1)(X-3)$ si et seulement si $-1$, 1 et 3 sont racines de $P$.

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^5 - 2\times(-1)^4 - 6\times(-1)^3 + a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = 0 \\ P(1) = 1^5 - 2\times 1^4 - 6\times 1^3 + a\times 1^2 + b + c = 0 \\ P(3) = 3^5 - 2\times 3^4 - 6\times 3^3 + a\times 3^2 + b\times 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 + 6 + a - b + c = 0 \\ 1 - 2 - 6 + a + b + c = 0 \\ 3^4(3 - 2 - 2) + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} a - b + c = -3 \\ a + b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 81 \end{cases}$$

$L_2 - L_1$ entraine que $2b = 10$ donc $b = 5$
Et $L_2 + L_1$ entraine que $2a + 2c = 4$ donc $a + c = 2 : L'_1$
On remplace $b = 5$ dans $L_3$ : $9a + 15 + c = 81$ donc $9a + c = 66 : L'_2$
$L'_2 - L'_1$ entraine que $8a = 64$ donc $a = 8$ et donc $c = 2 - 8 = -6$
Finalement $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

$A_n$ est divisible par $B$ si et seulement si les racines de $B$ sont aussi des racines de $A_n$.
Le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc les deux racines de $B$ sont :

$$X_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$

$$X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$

Remarque : $X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow (-X)^2 + (-X) + 1 = 0$
Donc les racines du polynôme $B$ vérifient

$$-X = j \quad \text{ou} \quad -X = j^2$$

$$A_n(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^n (j^2)^2 + (-j)^{2n}(-j) = j^{2n}j^4 - j^{2n}j = 0$$

Comme $A_n$ est un polynôme à coefficients réels, $-\overline{j} = -j^2$ est aussi racine.
On conclut que $X^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$$P_n(j) = (j+1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$$

Si $n = 6p$

$$P_{6p}(j) = j^{12p} - j^{6p} - 1 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 1$

$$P_{6p+1}(j) = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

Si $n = 6p + 2$

$$P_{6p+2}(j) = j^{12p+4} - j^{6p+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$

Si $n = 6p + 3$

$$P_{6p+3}(j) = -j^{12p+6} - j^{6p+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$

Si $n = 6p + 4$

$$P_{6p+4}(j) = j^{12p+8} - j^{6p+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 5$

$$P_{6p+5}(j) = -j^{12p+10} - j^{6p+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Il existe $A, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n + X + 1 = A(X-1)^2 + R \quad (*)$$

Avec $d°R < 2$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$, ce qui entraine que $R' = a$
Prenons $X = 1$

$$3 = R(1) = a + b$$

On dérive $(*)$

$$nX^{n-1} + 1 = A'(X-1)^2 + A(X-1) + R'$$

On prend $X = 1$

$$n + 1 = a$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n+1) = 2 - n$$

Et finalement

$$R = (n+1)X + 2 - n$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

Il existe un unique couple de polynôme $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X-1)^2 Q + R$ avec $d°R \leq 2$. Il existe donc deux réels $a$ et $b$ tels que $R = aX + b$

$$X^n = (X-1)^2 Q + aX + b \quad (*)$$

Pour $X = 1$

$$1 = a + b$$

Puis on dérive $(*)$

$$nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$$

Pour $X = 1$

$$n = a$$

Donc $b = 1 - n$ et

$$R = nX + 1 - n$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

$$(X+1)^n = (X^2+1)Q + R$$

Or $d°R < 2$ et donc $R = aX + b$.

On pose $X = i$.

$$(i+1)^n = ai + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\right)^n = b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

$$= b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Donc

$$R = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X + \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 23.

Il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes, avec $d°R < 2$ tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + R$$

Il existe $a$ et $b$ réels tels que $R = aX + b$

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + aX + b \quad (*)$$

On pose $X = 1$

$$2^n = a + b$$

On dérive $(*)$

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$$

On pose $X = 1$

$$n2^{n-1} = a$$

Donc $b = 2^n - n2^{n-1}$

Finalement

$$R=n2^{n-1}X+2^n-n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

Il existe $Q_n$ et $R_n$ tels que :

$$A_n=BQ_n+R_n \Leftrightarrow X^n+X+b=(X-a)^2Q_n+R_n$$

Avec $d°R_n<2$. Donc il existe $\alpha_n$ et $\beta_n$ tels que :

$$X^n+X+b=(X-a)^2Q_n+\alpha_nX+\beta_n \quad (1)$$

En dérivant on trouve

$$nX^{n-1}+1=(X-a)[2Q_n+(X-a)^2Q'_n]+\alpha_n \quad (2)$$

On fait $X=a$ dans $(1)$ et dans $(2)$.

$$\begin{cases} a^n+a+b=\alpha_na+\beta_n \\ na^{n-1}+1=\alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n=na^n+1 \\ \beta_n=a^n+a+b-(na^{n-1}+1)a=-(n-1)a^n+b \end{cases}$$

Donc

$$R_n=(na^n+1)X-(n-1)a^n+b$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

Il existe $Q$ et $R$ tels que $A=BQ+R$ et $d°R<d°B=2$ donc degré de $R$ est inférieur ou égal à 1 on a alors $R=aX+b$ où $a$ et $b$ sont des réels.

$A(i)=B(i)Q(i)+R(i)\Leftrightarrow i^{2n}+2i^n+1=ai+b$ car $B(i)=i^2+1=0$

Si $n=2p$ $i^{2n}+2i^n+1=ai+b \Leftrightarrow i^{4p}+2i^{2p}+1=ai+b \Leftrightarrow 1+2(-1)^p+1=ai+b \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a=0 \\ b=2+2(-1)^p \end{cases}$

Donc $R=2+2(-1)^p$

Si $n=2p+1$

$$i^{2n}+2i^n+1=ai+b \Leftrightarrow i^{4p+2}+2i^{2p+1}+1=ai+b \Leftrightarrow -1+2(-1)^pi+1=ai+b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2(-1)^p \\ b=0 \end{cases}$$

Donc $R=2(-1)^pX$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. Les quatre racines de $X^4-1=0$, c'est-à-dire $\{1,i,-1,-i\}$ vérifie $X^4=1$ donc $(X^4)^n-1=1^n-1=0$ donc ces racines sont des racines de $X^{4n}-1$, on peut mettre $X^4-1$ en facteur dans ce polynôme.
2. 

Première méthode :

D'après la première question il existe $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ et $Q_d$ tels que :

$$X^{4a}-1=Q_a(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4a}=Q_a(X^4-1)+1$$
$$X^{4b}-1=Q_b(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4b}=Q_b(X^4-1)+1$$
$$X^{4c}-1=Q_c(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4c}=Q_c(X^4-1)+1$$
$$X^{4d}-1=Q_d(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4d}=Q_d(X^4-1)+1$$

Donc

$$\begin{aligned} P&=X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}=X^{4a}X^3+X^{4b}X^2+X^{4c}X+X^{4d} \\ &=(Q_a(X^4-1)+1)X^3+(Q_b(X^4-1)+1)X^2+(Q_c(X^4-1)+1)X+Q_d(X^4-1) \\ &+1=(X^4-1)[Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d]+X^3+X^2+X+1 \\ &=(X-1)(X^3+X^2+X+1)[Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d]+X^3+X^2+X+1 \\ &=(X^3+X^2+X+1)((X-1)(Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d)+1) \end{aligned}$$

Deuxième méthode : $X^{4n}-1\equiv 0\ \ [X^4-1]\Leftrightarrow X^{4n}\equiv 1\ \ [X^4-1]$

Donc

$$\begin{aligned}X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}&=X^{4a}X^3+X^{4b}X^2+X^{4c}X+X^{4d}\\&\equiv 1\times X^3+1\times X^2+1\times X+1\ \ [X^4-1]\equiv X^3+X^2+X+1\ \ [X^4-1]\end{aligned}$$

Donc il existe $Q$ tel que

$$\begin{aligned}X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}&=(X^4-1)Q+X^3+X^2+X+1\\&=(X^3+X^2+X+1)((X-1)Q+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

Les trois racines de $P$ sont $\alpha, 2\alpha$ et $\beta$, les relations entre les racines et les coefficients de $P$ donnent

$$\begin{cases}\alpha+2\alpha+\beta=0\\ \alpha\times 2\alpha+\alpha\beta+2\alpha\beta=-63\\ \alpha\times 2\alpha\times\beta=-162\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha+\beta=0\\ 2\alpha^2+3\alpha\beta=-63\\ 2\alpha^2\beta=-162\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ 2\alpha^2+3\alpha(-3\alpha)=-63\\ 2\alpha^2(-3\alpha)=-162\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ -7\alpha^2=-63\\ -6\alpha^3=-162\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ \alpha^2=9\\ \alpha^3=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ \alpha=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-9\\ \alpha=3\end{cases}$$

Les trois racines de $P$ sont 3, 6 et $-9$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. On rappelle que $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=p$ et $\alpha\beta\gamma=-q$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

Donc

$$A=0^2-2p=-2p$$

2. $\alpha^3+p\alpha+q=0$ entraine que $\alpha^3=-p\alpha-q$, idem pour $\beta$ et $\gamma$.

$$B=-p\alpha-q-p\beta-q-p\gamma-q=-p(\alpha+\beta+\gamma)-3q=-3q$$

3.

$$C=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)=\alpha\beta(-\gamma)+\alpha\gamma(-\beta)+\beta\gamma(-\alpha)=-3\alpha\beta\gamma=3q$$

4.

$$\begin{aligned}D=\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+\alpha^3\gamma+\alpha\gamma^3+\beta^3\gamma+\beta\gamma^3&=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\gamma(\alpha^2+\gamma^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)\\&=\alpha\beta(-2p-\gamma^2)+\alpha\gamma(-2p-\beta^2)+\beta\gamma(-2p-\alpha^2)\\&=-2p(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta^2\gamma-\alpha^2\beta\gamma=-2p^2-\alpha\beta\gamma(\gamma+\beta+\alpha)\\&=-2p^2-(q)\times 0=-2p^2\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Première méthode

   $x$ et $y$ sont les deux racines du polynôme $X^2-5X+6$

   Le discriminant vaut $\Delta=1$ et les racines sont 2 et 3

   Seconde méthode

$$y=5-x$$

   Donc $xy=6\Leftrightarrow x(5-x)=6\Leftrightarrow 5x-x^2=6\Leftrightarrow 0=x^2-5x+6=0$

   Donc $x=2$ ou $x=3$

   Si $x=2$ alors $y=5-2=3$ et si $x=3$ alors $y=5-3=2$, donc les solutions sont 2 et 3.

2. Le système $(*)$ devient

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=9 \\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=15 \\ \alpha\beta\gamma\delta=18 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ 6+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=9 \\ 6\gamma+6\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=15 \\ 6\gamma\delta=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=3 \\ 6\gamma+6\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=15 \\ \gamma\delta=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+3=3 \\ 6\gamma+6\delta+3\alpha+3\beta=15 \\ \gamma\delta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=0 \\ 2\gamma+2\delta+\alpha+\beta=5 \\ \gamma\delta=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \\ \gamma\delta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=5 \\ \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=0 \\ \gamma=-\delta \\ \gamma\delta=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta=5 \\ -\delta\alpha+\alpha\delta-\delta\beta+\beta\delta=0 \\ \gamma=-\delta \\ -\delta^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta=5 \\ 0=0 \\ \gamma=-\delta \\ \delta=\pm i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=5 \\ \gamma=\mp i\sqrt{3} \\ \delta=\pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

Comme $\alpha+\beta=5$ et $\alpha\beta=6$ alors $\alpha$ et $\beta$ valent 2 et 3

Les 4 racines sont 2, 3, $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$

4. Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=(X-2)(X-3)\left(X-i\sqrt{3}\right)\left(X+i\sqrt{3}\right)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P=(X-2)(X-3)(X^2+3)$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1. $0\times P(-1)=(0-2)P(0)\Leftrightarrow 0=-2P(0)\Leftrightarrow P(0)=0$
   $1\times P(0)=(1-2)P(1)\Leftrightarrow P(0)=-P(1)\Leftrightarrow 0=P(1)$
   Donc 0 et 1 sont des racines de $P$.
2. Soit $a\neq 0$ tel que $P(a)=0$. $aP(a-1)=(a-2)P(a)\Leftrightarrow aP(a-1)=0\Leftrightarrow P(a-1)=0$
   $a-1$ est une racine de $P$.
   Soit $a\neq 1$ tel que $P(a)=0$.
   $$(a+1)P(a+1-1)=(a+1-2)P(a+1)\Leftrightarrow (a+1)P(a)=(a-1)P(a+1)\Leftrightarrow 0 =(a-1)P(a+1)$$
   Donc $P(a+1)=0$, $a+1$ est une racine de $P$.
3. Supposons que $P$ admette une racine $a$ telle que $\mathcal{Re}(a)<1$ différente de 0 alors $a-1$ est racine, $a-1$ est différent de 0, donc $a-2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a-k$ est racine de $P$, ce qui voudrait dire que $P$ admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.
   Supposons que $P$ admette une racine $a$ telle que $\mathcal{Re}(a)>1$ différente de 1 alors $a+1$ est racine, $a+1$ est différent de 1, donc $a+2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a+k$ est racine de $P$, ce qui voudrait dire que $P$ admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.
   0 et 1 sont les deux seules racines de $P$ si $P$ n'est pas le polynôme nul.
4. Si $P$ n'est pas le polynôme nul, comme 0 et 1 sont les seules racines de $P$ il existe $\alpha\neq 0$ tels que $P=\alpha X^k(X-1)^l$, et si $P=0$ alors $P=0\times X^k(X-1)^l$ (c'est-à-dire que $\alpha=0$).

5. Si $P$ vérifie $XP(X-1)=(X-2)P(X)$ alors $P$ est de la forme $P=\alpha X^k(X-1)^l$, il faut étudier la réciproque, c'est-à-dire chercher parmi ces polynômes lesquels sont effectivement solution.
On remplace $P=\alpha X^k(X-1)^l$ dans $XP(X-1)=(X-2)P(X)$, on trouve que :
$$X\alpha(X-1)^k(X-2)^l=(X-2)\alpha X^k(X-1)^l$$
Les puissances en $X-2$ sont les mêmes donc $l=1$.
Les puissances en $X-1$ sont les mêmes donc $k=l=1$
On vérifie qu'alors les puissances en $X$ sont les mêmes, finalement
$$P=\alpha X(X-1)$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

$$\begin{array}{l|l}
1-2X \qquad\qquad +X^3+X^4 & 1+X+X^2 \\ \cline{2-2}
1+X+X^2 & 1-3X+2X^2 \\ \cline{1-1}
-3X-X^2+X^3+X^4 & \\
-3X-3X^2-3X^3 & \\ \cline{1-1}
2X^2+4X^3+X^4 & \\
2X^2+2X^3+2X^4 & \\ \cline{1-1}
2X^3-X^4 &
\end{array}$$

$$1-2X+X^3+X^4=(1+X+X^2)(1-3X+X^2)+X^3(2-X)$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. $P'=5X^4+4X^3+6X^2+4X+1$

$$\begin{array}{l|l}
X^5+X^4+2X^3+2X^2+X+1 & 5X^4+4X^3+6X^2+4X+1 \\ \cline{2-2}
X^5+\frac{4}{5}X^4+\frac{6}{5}X^3+\frac{4}{5}X^2+\frac{X}{5} & \frac{1}{5}X+\frac{1}{25} \\ \cline{1-1}
\frac{1}{5}X^4+\frac{4}{5}X^3+\frac{6}{5}X^2+\frac{4}{5}X+1 & \\
\frac{1}{5}X^4+\frac{4}{25}X^3+\frac{6}{25}X^2+\frac{4}{25}X+\frac{1}{25} & \\ \cline{1-1}
\frac{16}{25}X^3+\frac{24}{25}X^2+\frac{16}{25}X+\frac{24}{25} &
\end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{16}{25}X^3+\frac{24}{25}X^2+\frac{16}{25}X+\frac{24}{25}=\frac{8}{25}(2X^3+3X^2+2X+3)$

$$\begin{array}{l|l}
5X^4+4X^3+6X^2+4X+1 & 2X^3+3X^2+2X+3 \\ \cline{2-2}
5X^4+\frac{15}{2}X^3+5X^2+\frac{15}{2}X & \frac{5}{2}X-\frac{7}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{2}X^3+X^2-\frac{7}{2}X+1 & \\
-\frac{7}{2}X^3-\frac{21}{4}X^2-\frac{7}{2}X-\frac{21}{4} & \\ \cline{1-1}
\frac{25}{4}X^2+\frac{25}{4} &
\end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{25}{4}X^2+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}(X^2+1)$

$$\begin{array}{l|l}
2X^3+3X^2+2X+3 & X^2+1 \\ \cline{2-2}
2X^3+2X & 2X+3 \\ \cline{1-1}
3X^2+3 & \\
3X^2+3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Le PGCD de $P$ et $P'$ est $X^2+1$.

2. Les racines communes à $P$ et $P'$ sont $i$ et $-i$, les racines multiples de $P$ sont $i$ et $-i$. Ce sont au moins des racines doubles. Ce ne sont pas des racines triples car sinon $P$ auraient 6 racines en comptant leurs multiplicités.
3. $P$ est divisible par $(X-i)^2(X+i)^2 = [(X-i)(X+i)]^2 = [X^2+1]^2$.
4. il reste à diviser $P$ par $(X^2+1)^2 = X^4+2X^2+1$ et on trouve, après calculs, $X+1$, donc

$$P = (X^2+1)^2(X+1)$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1. Oui ! Par exemple $P = X^3+1$
2. Si $P = aX^3+bX^2+cX+d$, avec $a \neq 0$, pour qu'il soit de degré exactement 3.

$$\begin{aligned}P(X+1)-P(X) &= a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-aX^3-bX^2-cX-d\\ &= a(X^3+3X^2+3X+1)+b(X^2+2X+1)+c(X+1)+d-aX^3-bX^2-cX-d\\ &= 3aX^2+(3a+2b)X+a+b+c\end{aligned}$$

Le degré de ce polynôme est 2 puisque $a \neq 0$

3.

$$\begin{cases}P(X+1)-P(X)=X^2-1\\ P(0)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3a+b)X^2+(3a+2b+c)X+a+b+c=X^2-1\\ P(0)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{matrix}\begin{cases}3a=1\\ 3a+2b=0\\ a+b+c=-1\\ d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ 2b=-3a=-1\\ c=-1-a-b\\ d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{1}{2}\\ c=-1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{6}\\ d=1\end{cases}$$

$$P = \frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2-\frac{5}{6}X+1$$

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & & -X^4 & & -X^2 & & +1 & X^4+2X^3-2X-1\\
\cline{8-8}
X^6 & +2X^5 & & -2X^3 & -X^2 & & & X^2-2X+3\\
\hline
 & -2X^5 & -X^4 & +2X^3 & & & +1 & \\
 & -2X^5 & -4X^4 & & +4X^2 & +2X & & \\
\hline
 & & 3X^4 & +2X^3 & -4X^2 & -2X & +1 & \\
 & & 3X^4 & +6X^3 & & -6X & -3 & \\
\hline
 & & & -4X^3 & -4X^2 & +4X & +4 &
\end{array}$$

$$PGCD(P,Q) = PGCD(Q,-4X^3-4X^2+4X+4) = PGCD(Q,X^3+X^2-X-1)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +2X^3 & & -2X & -1 & X^3+X^2-X-1\\
\cline{6-6}
X^4 & +X^3 & -X^2 & -X & & X+1\\
\hline
 & X^3 & +X^2 & -X & -1 & \\
 & X^3 & +X^2 & -X & -1 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc $PGCD(P,Q) = X^3+X^2-X-1 = X^2(X+1)-(X+1) = (X^2-1)(X+1) = (X-1)(X+1)^2$

Les racines complexes communes à $P$ et $Q$ sont 1 de multiplicité 1 et $-1$ de multiplicité 2.

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

On pose $d^\circ P = n$.

$P'$ divise $P$ si et seulement si il existe un polynôme $Q$ tel que :

$$P = QP'$$

$$d^\circ P = n \text{ et } d^\circ P' = n-1 \Rightarrow d^\circ Q = 1$$

Donc $Q$ admet une racine complexe $\alpha$.

On pose $Q = aX + b$ et $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ (avec $a_n \neq 0$) alors $P' = n a_n X^{n-1} + \cdots + a_1$

En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$a_n = n a \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

Première méthode :

La formule de Taylor pour le polynôme $P$ en $\alpha$ donne

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-\alpha)^k = a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + a_n(X-\alpha)^n$$

Donc

$$P' = \sum_{k=0}^{n} a_k k (X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k (X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k (X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (X-\alpha)^k$$
$$= a_1 + 2a_2(X-\alpha) + \cdots + n a_n (X-\alpha)^{n-1}$$

En changeant $k$ en $k+1$.

Comme $Q$ est un polynôme de degré 1 dont $\alpha$ est une racine donc $Q = \frac{1}{n}(X-\alpha)$

On remplace ces deux expressions dans $P = QP'$.

$$a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + a_n(X-\alpha)^n$$
$$= a(X-\alpha)[a_1 + 2a_2(X-\alpha) + \cdots + n a_n (X-\alpha)^{n-1}]$$
$$\Leftrightarrow a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + a_k(X-\alpha)^k + \cdots + a_n(X-\alpha)^n$$
$$= \frac{1}{n} a_1(X-\alpha) + \frac{2}{n} a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{k}{n} a_k (X-\alpha)^k \ldots + a_n(X-\alpha)^n$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{2}{n} a_1 \\ \vdots \\ a_k = \dfrac{k+1}{n} a_k \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_k = 0 \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{array}\right.$$

Donc

$$P = a_n (X-\alpha)^n$$

Deuxième méthode :

En dérivant $P = QP'$, et on rappelle que $Q' = \frac{1}{n}$

$$P' = Q'P' + QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n} P' + QP'' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right) P' = QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1} QP''$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1} Q^2 P''$$

En dérivant $\left(1 - \frac{1}{n}\right) P' = QP''$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) P'' = Q'P'' + QP''' = \frac{1}{n} P'' + QP''' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right) P'' = QP''' \Leftrightarrow P'' = \frac{n}{n-2} QP'''$$

Donc

$$P=\frac{n}{n-1}Q^2P''=\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$. On montre par récurrence que

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)P^{(k)}=QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P=\frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)}$$

On dérive $\left(1-\frac{k}{n}\right)P^{(k)}=QP^{(k+1)}$

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)P^{(k+1)}=Q'P^{(k+1)}+QP^{(k+2)}=\frac{1}{n}P^{(k+1)}+QP^{(k+2)}\Leftrightarrow\left(1-\frac{k+1}{n}\right)P^{(k+1)}=QP^{(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow P^{(k+1)}=\frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)}$$

$$P=\frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)}=\frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}\frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)}$$

$$=\frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))}Q^{k+2}P^{(k+2)}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout $k\le n-1$.
On l'applique au rang $n-1$ :

$$P=\frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots\big(n-(n-1)\big)}Q^nP^{(n)}$$

$P^{(n)}=n\times(n-1)\times\dots\times2\times1\times a_n$ (ce qui est important c'est que c'est une constante).
Peu importe la constante, il est clair que $P=KQ^n$, comme $Q$ est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P=\lambda(X-\alpha)^n$$

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1.

$$\frac{P(X)}{X^2}=\frac{2X^4+3X^3-X^2+3X+2}{X^2}=2X^2+3X-1+\frac{3}{X}+\frac{2}{X^2}$$

Comme

$$Y^2=X^2+2+\frac{1}{X^2}\Rightarrow X^2+\frac{1}{X^2}=Y^2-2$$

On a

$$\frac{P(X)}{X^2}=2\left(X^2+\frac{1}{X^2}\right)+3\left(X+\frac{1}{X}\right)-1=2(Y^2-2)+3Y-1=2Y^2+3Y-5$$

Les racines de $Q$ sont 1 et $-\frac{5}{2}$

Donc les racines de $P$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{l}X+\frac{1}{X}=1\\X+\frac{1}{X}=-\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}X^2+1=X\\\text{ou}\\X^2+1=-\frac{5}{2}X\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}X^2-X+1=0\\\text{ou}\\X^2+\frac{5}{2}X+1=0\end{array}\right.$$

Les racines de $X^2-X+1=0$ sont

$$-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{et}\quad -j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et celles de $X^2-\frac{5}{2}X+1=0$ sont

$$-\frac{1}{2}\quad \text{et}\quad -2$$

On en déduit la factorisation de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X)=2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X+2)(X^2-X+1)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X)=2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X+2)(X+j)(X+j^2)$$

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. Comme $\sin(n\theta)\neq 0$, $d°P=n$.

$$P=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}}{2i}X^k$$
$$=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}X^k-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{-ik\theta}X^k=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}X\right)^k-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{-i\theta}X\right)^k$$
$$=\frac{1}{2i}\left(1+e^{i\theta}X\right)^n-\frac{1}{2i}\left(1+e^{-i\theta}X\right)^n$$

Les racines $z\in\mathbb{C}$ de $P$ vérifient

$$\frac{1}{2i}\left(1+e^{i\theta}z\right)^n-\frac{1}{2i}\left(1+e^{-i\theta}z\right)^n=0\Leftrightarrow\left(1+e^{i\theta}z\right)^n=\left(1+e^{-i\theta}z\right)^n\Leftrightarrow\left(\frac{1+e^{i\theta}z}{1+e^{-i\theta}z}\right)^n=1$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},\frac{1+e^{i\theta}z}{1+e^{-i\theta}z}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},1+e^{i\theta}z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(1+e^{-i\theta}z\right)$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},e^{i\theta}z-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},z\left(e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\right)=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$$

Il faut quand même vérifier que $e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\neq 0$

$$e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}=0\Leftrightarrow e^{2i\theta}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},2\theta=\frac{2k\pi}{n}+2l\pi\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},\theta=\frac{k\pi}{n}+l\pi\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},n\theta=k\pi+nl\pi\Leftrightarrow\sin(n\theta)=0$$

Ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

$$P(z)=0\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$$

Les $n$ racines de $P$ sont les complexes $z_k=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$ avec $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

2.

$$\overline{z_k}=\overline{\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}}=\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{-i\theta}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}}=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-i\theta}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}\right)}=\frac{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}-e^{i\theta}}$$
$$=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}=z_k$$

Donc ces complexes sont des réels.

Allez à : Exercice 37