# Matrices

Exercice 1.

Pour une matrice à une ligne et une colonne de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ on posera $(a) = a$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soient $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer ${}^tPP$, en déduire que $P$ est inversible et donner $P^{-1}$.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$
3. Calculer ${}^tXAX$
4. On pose $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

   Calculer ${}^tX'DX'$ et montrer que ce réel est strictement positif pour $X' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tXAX \geq 0$.

   Indication : on pourra utiliser les questions précédentes.

Allez à : Correction exercice1

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Exprimer $A^n$ en fonction de $n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $A$ est inversible, calculer $A^{-1}$ et $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Allez à : Correction exercice2

Exercice 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$ et $A^3$. Calculer $A^3 + A^2 + A$
2. Exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I_3$.

## CORRECTION

Correction exercice1.

1.

$${}^tPP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc $P$ est inversible et

$$P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & 12 \\ 18 & -9 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\big(x_1(6x_1 - 2x_2 + 2x_3) + x_2(-2x_1 + 5x_2) + x_3(2x_1 + 7x_3)\big) \\ &= \frac{1}{3}(6x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + 7x_3^2) \\ &= \frac{1}{3}(6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3) \end{aligned}$$

4.

$${}^tX'DX' = {x_1'}^2 + 2{x_2'}^2 + 3{x_3'}^2 > 0$$

Pour $x_1'$, $x_2'$ et $x_3'$ non tous nuls

$${}^tX'DX' = {}^tX'P^{-1}APX' = {}^tX'{}^tPAPX' = {}^t(PX')A(PX') = {}^tXAX$$

$${}^tXAX = {}^tX{}^tPDP\,X = {}^t(PX)D(PX) = {}^tX'DX' = {x_1'}^2 + 2{x_2'}^2 + 3{x_3'}^2 \geq 0$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice2.

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}$$

L'égalité est vraie pour $n = 1$

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la récurrence.

Et pour $n = 0$, $A^0 = I$.

2. Regardons si $A$ est inversible. Dans la suite du semestre on verra d'autres techniques

Soit $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$AX=Y\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \\ 2x_1+x_2=y_2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=-2x_2+y_2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=-2y_1+y_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que $A$ est inversible et que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $n>0$, on connait $A^n$ grâce à la première question, pour les puissance négatives :

$$(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(A^{-1})^3=A^{-1}A^{-2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$(A^{-1})^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^n & 1 \end{pmatrix}$$

L'égalité est vraie pour $n=1$

$$(A^{-1})^{n+1}=A^{-n}A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la démonstration

Pour $m<0$, on pose $n=-m$

$$A^m=A^{-n}=(A^{-1})^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^{n+1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-2)^{-m+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Correction exercice3.

1.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3+A^2+A=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=-2I_3$$

2.

$$A^3+A^2+A=-2I_3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}A^3-\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A=I_3\Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3\right)=I_3$$

Ce qui montre que $A$ est inversible et que

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3$$