

# Logique

Exercice 1 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si Napoléon était chinois alors  $3 - 2 = 2$
2. Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.
3. Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs.
6. Paris est en France ou Madrid est en chine.
7. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
8. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.

Aller à : [Correction exercice 1](#) :

Exercice 2 :

Soient  $(P)$ ,  $(Q)$  et  $(R)$  trois propositions, donner la négation de

- a)  $(P)$  et  $(\text{non}(Q) \text{ ou } (R))$
- b)  $((P) \text{ et } (Q)) \Rightarrow (R)$

Aller à : [Correction exercice 2](#) :

Exercice 3 :

Soient  $A, B$  et  $C$  trois assertions. Pour chacune des assertions suivantes :

- $(A_1) \equiv (A \text{ et non}(B))$ ;  $(A_2) \equiv (A \text{ ou non}(B))$ ;  $(A_3) \equiv (A \text{ ou } (B \text{ et } C))$ ;  $(A_4) \equiv (A \text{ et } (B \text{ ou } C))$   
 $(A_5) \equiv (A \Rightarrow \text{non}(B))$ ;  $(A_6) \equiv (A \Rightarrow B)$ ;  $(A_7) \equiv (\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C)$ ;  $(A_8) \equiv ((A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C))$

Ecrire sa négation.

Aller à : [Correction exercice 3](#) :

Exercice 4 :

Donner la négation mathématique des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4.  $f$  est positive, c'est-à-dire «  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$  »
5.  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire «  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$  »

Aller à : [Correction exercice 4](#) :

Exercice 5 :

Soient les propositions,  $(P)$  « J'ai mon permis de conduire » et  $(Q)$  « j'ai plus de 18 ans »

Les propositions  $(P) \Rightarrow (Q)$  et  $(Q) \Rightarrow (P)$  sont-elles vraies ? Que peut-on conclure ?

Aller à : [Correction exercice 5](#) :

Exercice 6 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  $(2 < 3)$  et  $(2 \text{ divise } 4)$
2.  $(2 < 3)$  et  $(2 \text{ divise } 5)$
3.  $(2 < 3)$  ou  $(2 \text{ divise } 5)$
4.  $(2 < 3)$  et  $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$

5.  $\text{non}(2 < 3)$  ou  $(2 \text{ divise } 5)$

Aller à : [Correction exercice 6](#) :

Exercice 7 :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{N}$ . Ecrire en utilisant  $\forall, \exists$  les assertions

$$A = \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, A \subset B, A \not\subset B$$

Aller à : [Correction exercice 7](#) :

Exercice 8 :

On considère la proposition  $(P)$  suivante :

$(P)$  « Pour tout nombre réel  $x$ , il existe au moins un entier naturel  $N$  supérieur ou égal à  $x$  »

1. Ecrire la proposition  $(P)$  avec des quantificateurs.
2. Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

Aller à : [Correction exercice 8](#) :

Exercice 9 :

Notons  $E$  l'ensemble des étudiants,  $S$  l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant  $x$ ,  $h_j(x)$  son heure de réveil le jour  $j$ .

- a) Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h »
- b) Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Aller à : [Correction exercice 9](#) :

Exercice 10 :

Soit  $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$  l'ensemble des nombres premiers et  $A$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Ecrire en utilisant  $\forall, \exists$  les assertions  $A$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ ,  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{N}$ .

Tout entier naturel  $n \geq 2$  admet un diviseur premier, les éléments de  $A$  ont un diviseur premier commun, les éléments de  $A$  n'ont aucun diviseur premier commun.

Aller à : [Correction exercice 10](#) :

Exercice 11 :

Soit  $n$  un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? Donner leur contraposée et leur négation.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (2 \text{ divise } n)$
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$
6.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$

Aller à : [Correction exercice 11](#) :

Exercice 12 :

Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12)) \Leftrightarrow (n = 6)$

Aller à : [Correction exercice 12](#) :

Exercice 13 :

Soient les 4 assertions suivantes :

- $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$
- $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} y^2 > x$

- Les assertions  $a, b, c$  et  $d$  sont-elles vraies ou fausses ?
- Donner leur négation

Aller à : [Correction exercice 13 :](#)

Exercice 14 :

Soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres rationnels. Que signifie en mots les assertions suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{Z}, q_n = l,$$

$$\exists l \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N}, |q_n| < q$$

Attention : il ne s'agit pas de faire la lecture à voix haute de ces quatre suites de symboles mais de traduire l'énoncé en phrase courte dont la compréhension est immédiate.

Aller à : [Correction exercice 14 :](#)

Exercice 15 :

- Donner la négation de la phrase mathématique suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

- Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Aller à : [Correction exercice 15 :](#)

Exercice 16 :

Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Donner la négation et la contraposée de cette phrase logique.

Allez à : [Correction exercice 16 :](#)

Exercice 17 :

Compléter, lorsque c'est possible, avec  $\forall$  ou  $\exists$  pour que les énoncés suivants soient vrais.

- $\dots x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
- $\dots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
- $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Aller à : [Correction exercice 17 :](#)

Exercice 18 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

- $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
- $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
- $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
- $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$

Aller à : [Correction exercice 18 :](#)

## Corrections

Correction exercice 1 :

1. Il s'agit, ici d'une implication. « Napoléon est chinois » est faux et «  $3 - 2 = 2$  » est faux, or la seule possibilité pour qu'une implication soit fautive est qu'une assertion vraie implique une assertion fautive, donc l'assertion 1. est vraie.
2. Une phrase, en français, du genre « soit ..., soit ... » se traduit mathématiquement par « ... ou ... » « Cléopâtre était chinoise » est faux et « les grenouilles aboient » est faux donc l'assertion 2. est fautive.
3. « les roses sont des animaux » est faux et « les chiens ont 4 pattes » est vrai, donc l'assertion 3. est vraie.
4. « l'homme est un quadrupède » est faux et « il parle » est vrai, donc l'assertion 4. est vraie.
5. « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » peut se traduire par « les roses ne sont pas des animaux et les roses ne sont pas des fleurs ». « les roses ne sont pas des animaux » est vrai et « les roses ne sont pas des fleurs » est faux donc « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » est faux. Avec un minimum de bon sens c'est assez évident !
6. « Paris est en France » est vrai et « Madrid est en chine » est faux, donc « Paris est en France ou Madrid est en chine » est vrai.
7. « la pierre ponce est un homme » est faux et « les femmes sont des sardines » est faux, une équivalence entre deux assertions fautes est vraie.
8. « les poiriers ne donnent pas de melons » est vrai et « Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai, donc « les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai.

Aller à : **Exercice 1 :**

Correction exercice 2 :

a)

$$\begin{aligned} \text{non} \left( (P) \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } (R)) \right) &\equiv \left( \text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(Q) \text{ ou } (R)) \right) \\ &\equiv \left( \text{non}(P) \text{ ou } ((Q) \text{ et } \text{non}(R)) \right) \\ &\equiv \left( \text{non}(P) \text{ ou } (Q) \right) \text{ et } \left( \text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(R) \right) \\ &\equiv \left( \text{non}(P) \text{ ou } (Q) \right) \text{ et } \text{non}((P) \text{ et } (R)) \end{aligned}$$

Les deux dernières équivalences logiques me paraissent acceptables, parce qu'il y a souvent différentes façon d'exprimer une négation, ensuite il faut voir dans les exercices comment se présentent les propositions  $(P)$ ,  $(Q)$  et  $(R)$ .

b)

$$\text{non} \left( ((P) \text{ et } (Q)) \Rightarrow (R) \right) \equiv ((P) \text{ et } (Q)) \text{ et } \text{non}(R) \equiv (P) \text{ et } (Q) \text{ et } \text{non}(R)$$

Aller à : **Exercice 2 :**

Correction exercice 3 :

$$\begin{aligned} \text{non}(A_1) &\equiv \text{non}(A \text{ et } \text{non}(B)) \equiv \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(B)) \equiv \text{non}(A) \text{ ou } B \\ \text{non}(A_2) &\equiv \text{non}(A \text{ ou } \text{non}(B)) \equiv \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(\text{non}(B)) \equiv \text{non}(A) \text{ et } B \\ \text{non}(A_3) &\equiv \text{non}(A \text{ ou } (B \text{ et } C)) \equiv \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B \text{ et } C) \equiv \text{non}(A) \text{ et } (\text{non}(B) \text{ ou } \text{non}(C)) \\ &\equiv (\text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B)) \text{ ou } (\text{non}(A) \text{ et } \text{non}(C)) \end{aligned}$$

Il y a d'autres expressions possibles de cette négation.

$$\begin{aligned} \text{non}(A_4) &\equiv \text{non}(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \equiv \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B \text{ ou } C) \equiv \text{non}(A) \text{ ou } (\text{non}(B) \text{ et } \text{non}(C)) \\ &\equiv (\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)) \text{ et } (\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(C)) \end{aligned}$$

Il y a d'autres expressions possibles de cette négation.

$$\text{non}(A_5) \equiv \text{non}(A \Rightarrow \text{non}(B)) \equiv \text{non}(\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)) \equiv A \text{ et } B$$

$$\text{non}(A_6) \equiv \text{non}(A \Rightarrow B) \equiv \text{non}(\text{non}(A) \text{ ou } (B)) \equiv (A) \text{ et } \text{non}(B)$$

$$\begin{aligned} \text{non}(A_7) &\equiv \text{non}(\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C) \equiv \text{non}(\text{non}(\text{non}(A \text{ ou } B)) \text{ ou } C) \equiv \text{non}((A \text{ ou } B) \text{ ou } C) \\ &\equiv \text{non}(A \text{ ou } B) \text{ et } \text{non}(C) \equiv \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B) \text{ et } \text{non}(C) \end{aligned}$$

$$\text{non}(A_8) = \text{non}((A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)) \equiv \text{non}(\text{non}(A \text{ et } B) \text{ et } \text{non}(\text{non}(C)))$$

$$\equiv \text{non}(\text{non}(A \text{ et } B) \text{ et } C) \equiv (A \text{ et } B) \text{ ou } \text{non}(C) = (A \text{ ou } \text{non}(C)) \text{ et } (B \text{ ou } \text{non}(C))$$

Aller à : **Exercice 3 :**

Correction exercice 4 :

1. Il existe une boule qui n'est pas rouge dans l'urne. (La négation de « pour tout » est « il existe » et la négation « rouge » est « n'est pas rouge »).
2. Tous les nombres entiers sont pairs. (La négation de « il existe » (dans l'énoncé « certains » signifie « il existe ») est « tous ». Dans cette question on ne se demande pas si la proposition est vraie ou fausse.
3. Il s'agit d'une implication, la négation de  $(P) \Rightarrow (Q)$  est :  $(P)$  et  $\text{non}(Q)$  donc la négation demandée est « un nombre entier est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4 ». Dans cette question on ne se demande pas si l'implication est vraie ou fausse.
4.  $\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) < 0$ .
5.  $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$

Aller à : **Exercice 4 :**

Correction exercice 5 :

$(P) \Rightarrow (Q)$  est vraie, par contre  $(Q) \Rightarrow (P)$  est fausse, on en conclut que ces deux propositions ne sont pas équivalentes.

Aller à : **Exercice 5 :**

Correction exercice 6 :

1.  $(2 < 3)$  est vrai et  $(2 \text{ divise } 4)$  est vrai donc  $(2 < 3)$  et  $(2 \text{ divise } 4)$  est vrai.
2.  $(2 < 3)$  est vrai et  $(2 \text{ divise } 5)$  est faux, l'un des deux est faux donc  $(2 < 3)$  et  $(2 \text{ divise } 5)$  est faux.
3.  $(2 < 3)$  est vrai et  $(2 \text{ divise } 5)$  est faux, l'un des deux est vrai donc  $(2 < 3)$  et  $(2 \text{ divise } 5)$  est vrai.
4.  $(2 < 3)$  est vrai et  $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$  est vrai, les deux sont vrais donc  $(2 < 3)$  et  $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$  est vrai.
5.  $(2 < 3)$  est vrai donc  $\text{non}(2 < 3)$  est faux (on peut aussi dire que  $\text{non}(2 < 3) \Leftrightarrow (2 \geq 3)$  qui est faux) et  $(2 \text{ divise } 5)$  est faux par conséquent  $\text{non}(2 < 3)$  ou  $(2 \text{ divise } 5)$  est faux car les deux assertions sont fausses.

Aller à : **Exercice 6 :**

Correction exercice 7 :

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \notin A, \quad \exists x \in \mathbb{N}, x \in A, x \in B, \quad \forall x \in A, x \in B, \quad \exists x \in A, x \notin B$$

Aller à : **Exercice 7 :**

Correction exercice 8 :

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, N \geq x$$

$$2. \exists x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, N < x. \text{ Il existe un réel tel que pour tout } N \text{ entier, } N \text{ est strictement inférieur à } x.$$

Aller à : **Exercice 8 :**

Correction exercice 9 :

a)  $\forall x \in E, \exists j \in S, h_j(x) < 8h.$

b)  $\exists x \in E, \forall j \in S, h_j(x) \geq 8h.$  Il y a un étudiant qui se lève à 8h ou après 8h tous les jours de la semaine. (Donc c'est un gros fainéant).

Aller à : **Exercice 9 :**

Correction exercice 10 :

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in A, n < M, \quad \forall M \in \mathbb{N}, \exists n \in A, n \geq M$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{P}, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp, \quad \exists p \in \mathbb{P}, \forall n \in A, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp, \quad \forall p \in \mathbb{P}, \exists n \in A, \forall k \in \mathbb{N}, n \neq kp$$

Aller à : **Exercice 10 :**

Correction exercice 11 :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$  est vraie.

Sa contraposée est  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 3) \Rightarrow (n < 5)$  ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 4) \Rightarrow (n \leq 4).$

(On rappelle que  $((P) \Rightarrow (Q)) \equiv (\text{non}(P) \text{ ou } (Q))$  donc la négation de  $((P) \Rightarrow (Q))$  est

$$\text{non}((\text{non}(P) \text{ ou } (Q))) \equiv (\text{non}(\text{non}(P)) \text{ et } \text{non}(Q)) \equiv ((P) \text{ et } \text{non}(Q))$$

$$\text{non}((n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)) \equiv ((n \geq 5) \text{ et } (n \leq 3)) \equiv ((n > 4) \text{ et } (n < 4))$$

La négation est :  $\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n \leq 3)$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$  est faux car pour  $n = 5$ ,  $(n \geq 5)$  est vrai et  $(n > 6)$  est faux (idem pour  $n = 6$ ).

Sa contraposée est  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \equiv (n < 7) \Rightarrow (n < 5).$

Sa négation est  $(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n \leq 6)) \equiv (\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n < 7))$

3.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$  est faux car pour  $n = 7$ ,  $(n \geq 5)$  est vrai et  $(n \leq 6)$  est faux.

Sa contraposée est  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \equiv (n < 7) \Rightarrow (n < 5).$

Sa négation est

$$(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n > 6)) \equiv (\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n > 7)) \equiv \exists n \in \mathbb{N}, (n > 7)$$

4.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \equiv (n = 0)$  si  $(n < 1)$  est vrai alors  $n = 0$  et comme  $0 = 0 \times 2$ , cela signifie que 2 divise 0, par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ divise } 2)$  est vrai.

Il n'y a que cela à vérifier parce que si  $n < 1$  est faux, quoiqu'il arrive à la conclusion, l'implication est vraie.

On aura pu aussi voir que :

$$(n \text{ divise } 2) \equiv (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k) \equiv (n \text{ est pair})$$

Sa contraposée est  $(\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)) \equiv \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est impair}) \Rightarrow (n \geq 1).$

Vu ainsi il est clair que la contraposée est vraie et que donc  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$  est vrai.

La négation est :  $\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2)$

5. Comme dans le 4.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \equiv (n = 0)$  mais 0 ne divise pas 2, sinon cela signifierait qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $2 = k \times 0$  ce qui est faux par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$  est faux. En effet une assertion vraie ne peut pas impliquer une assertion fausse.

La contraposée est  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1).$

La négation est  $(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2))$ . Vérifions que cette implication est vraie : soit  $n = 0$  et  $(n < 1)$  est vrai et  $(0 \text{ ne divise pas } 2)$  est vrai ce qui entraîne que

$(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2))$  est vrai.

6.  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \equiv (n \in \{0, 1\})$ , si  $n = 0$  alors  $n^2 = 0^2 = 0 = n$  et si  $n = 1$  alors  $n^2 = 1^2 = 1 = n$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n).$

La contraposée est  $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)$

Sa négation est  $\exists n \in \mathbb{N}, (n < 2) \text{ et } (n^2 \neq n)$ .

Aller à : **Exercice 11 :**

Correction exercice 12 :

- $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$  car un entier strictement supérieur à 4 est supérieur ou égal à 5.
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$  est faux car pour  $n = 4$ ,  $(n \geq 4)$  est vrai et  $(n \geq 5)$  est faux.
- Les diviseurs entiers et positifs de 12 sont  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  donc les diviseurs entiers et supérieurs ou égaux à 5 sont 6 et 12, bref, il suffit de dire que 12 rend vrai  $((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12))$  et faux  $(n = 6)$  pour pouvoir affirmer que  $\forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12)) \Leftrightarrow (n = 6)$  est faux.

Aller à : **Exercice 12 :**

Correction exercice 13 :

- est faux car si un tel  $x$  existe, il suffit de prendre  $y = -x - 1$  pour que  $x + y > 0$  soit faux, en effet  $x + (-x - 1) = -1 < 0$
  - est vrai, car pour un  $x$  fixé, on choisit  $y = -x + 1$  de façon à ce que  $x + (-x + 1) = 1 > 0$ .
  - est faux car si on prend  $x = y = -1$  alors  $x + y = -2$  est faux et donc on n'a pas  $x + y > 0$
  - Il suffit de prendre  $x = -1$ , ainsi pour tout  $y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$ , l'assertion est vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$   
(on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est vraie).
  - $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$   
(on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est fautive).
  - $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$   
(on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est vraie).
  - $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y^2 \leq x$

Aller à : **Exercice 13 :**

Correction exercice 14 :

La suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'entiers.

La suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante dont la valeur est entière.

La suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  prend toutes les valeurs entières.

La suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et vaut 0.

Aller à : **Exercice 14 :**

Correction exercice 15 :

1.

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| \geq \epsilon$$

2.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \geq \epsilon \Rightarrow n < N \text{ ou } p < 0$$

Aller à : **Exercice 15 :**

Correction exercice 16 :

La négation est :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

La contraposée est

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha, |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$$

Allez à : **Exercice 16 :**

Correction exercice 17 :

- a)  $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- b)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
- c)  $\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
- d)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$  ou  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Aller à : **Exercice 17 :**

Correction exercice 18 :

- a) Vraie
- b) Fausse par exemple pour  $x = 1$ , la négation est :  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 7$
- c) Vraie
- d) Fausse car la négation est manifestement vraie, la négation est :  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y \geq x^2$ .

Aller à : **Exercice 18 :**