Pascal Lainé

Géométrie dans le plan

Exercice 1.

Montrer que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que soient alignés les points d'affixe z, iz et i est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ dont on donnera le rayon.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2. (hors programme)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et A, B deux points du plan, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \lambda$$

Selon les valeurs de λ.

On pourra faire intervenir I le milieu de $[A, B]$.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3.

Soit h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' et de centres respectifs Ω, d'affixe ω, et Ω', d'affixe ω'.

1. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que les composés $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.
2. Si $kk' \neq 1$, montrer que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' et que les centres de h, h' et $h \circ h'$ sont alignés.
3. Si $kk' = 1$, montrer que $h \circ h'$ est une translation.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M, d'affixe z, N, d'affixe iz et P d'affixe $2i$.

Montrer que si M, N et P sont alignés l'ensemble des points d'affixe z sont sur un cercle de centre Ω d'affixe $1 + i$, et dont on précisera le rayon.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5.

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}};\quad j^2 = \bar{j}\quad \text{et que}\quad j^3 = 1$$

Soit r une transformation du plan qui a un point M associe le point M' d'affixe $M' = r(M)$ d'affixe $z' = -j^2 z + 1 + j^2$

Soit s une transformation du plan qui a un point M d'affixe z associe le point $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2\bar{z} + 1 + j^2$

1. Montrer que r est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre Ω et l'angle de la rotation.
2. Montrer que Ω est un point fixe de s.
3. Montrer que s est une symétrie orthogonale. (on ne demande pas l'axe de la symétrie).
4. Calculer l'affixe z'' du point $M'' = r \circ s(M)$, où M est un point d'affixe z. Que peut-on en déduire de $r \circ s$?

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$$

1. Montrer que f est une similitude directe, dont on donnera le rapport et le centre.
2. Montrer que f est la composée d'une homothétie de centre O dont on donnera le rapport et d'une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = -i\bar{z} + 1 + i$$

Soit g la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = i\bar{z} - 1 + i$$

1. Déterminer les points fixes de f et les points fixes de g.
   On posera $z = x + iy$
2. Soit $h = f \circ g$, quelle est cette transformation, que peut-on dire de son centre ?

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8.

On note A le point d'affixe $4 + 2i$ et O le point d'affixe 0.
Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9.

Soit $A(1,1)$ et $B(-1,2)$ de deux points du plan.
Déterminer les points M tels que le triangle ABM soit équilatéral.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10.

Soit f la similitude directe définie par $f(z) = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a = \rho e^{i\theta}$ et $\rho \neq 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe ω.
2. Donner l'image d'un complexe z par la rotation r de centre ω et d'angle θ.
3. Donner l'image d'un complexe z par l'homothétie h de centre ω et de rapport ρ.
4. Donner l'image d'un complexe z par $r \circ h$ en fonction de a, b et z, que peut-on en conclure ?

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11.

On rappelle l'identification canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto x + iy \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \\ z \mapsto \left(Re(z), Im(z)\right) \end{matrix}$$

1. Rappeler l'effet sur $\mathbb{C}$ des transformations du plan suivantes :
   a) Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la translation du vecteur d'affixe a.
   b) Pour tout $(a, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre d'affixe a.

c) Pour tout $(a,\theta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, la rotation d'angle θ et de centre d'affixe a.

d) Pour tout $(a,\theta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, la symétrie par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par un point d'affixe a.

2. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
3. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12.

Soient $\vec{u}=(-1,2)$, $\vec{v}=(3,-4)$, $\vec{w}=(-1,1)$,

1. Déterminer α et β réels tels que
$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
2. Soient $\vec{t}=(x,y)$, exprimer $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$, puis dans la base $(\vec{u},\vec{w})$.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13.

Soit D la droite d'équation $x+y=0$ et D' la droite d'équation $-2y=0$, soit s la symétrie, par rapport à D parallèlement à D'.

1. Déterminer la matrice S, dans la base canonique de la symétrie s.
2. Déterminer la matrice S', dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ où $\overrightarrow{e_1}=(1,-1)$ et $\overrightarrow{e_2}=(2,1)$, de cette symétrie.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14.

Soit r la rotation d'angle θ et s la symétrie orthogonale dont la matrice dans la base canonique est :
$$S=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $r\circ s$ dans la base canonique ?
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de $r\circ s$, quelle est cette application linéaire ?

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15.

On appelle $\beta=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Soit $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par sa matrice dans la base canonique par
$$P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$
Soit s l'application linéaire dont l'image d'un vecteur $\vec{u}=(x,y)$ est :
$$s(\vec{u})=\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y,\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y\right)$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Donner un vecteur directeur de $\ker(p)$ et un vecteur directeur de $Im(p)$.
3. Déterminer la matrice S de s dans la base canonique et montrer que s est une symétrie.
4. Montrer que p est une projection.
5. Déterminer un vecteur directeur de l'ensemble des vecteurs invariants de s et un vecteur directeur de l'ensemble $E=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^2, s(\vec{u})=-\vec{u}\}$
6. Soit $f=p\circ s$, déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
7. Montrer que f est une projection.

8. Soit $\overrightarrow{u_1} = (1,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (4,7)$, montrer que $\beta' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 15 :

Corrections

Correction exercice 1 :

Première méthode

Soit M le point d'affixe z, N le point d'affixe iz et A le point d'affixe i, ces trois points sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = 0$, ou, ce qui est équivalent à ce que

$$Im\left(\overline{(z-i)}(iz-i)\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{(z-i)}(iz-i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\overline{z}+i)(iz-i) = (z-i)(-i\overline{z}+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow i|z|^2 - i\overline{z} - z + 1 = -i|z|^2 + iz - \overline{z} + 1 \Leftrightarrow 2i|z|^2 - i\overline{z} - z - iz + \overline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 + (1-i)\overline{z} - (1+i)z = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1-i}{2i}\overline{z} - \frac{1+i}{2i}z = 0$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{-1-i}{2}\overline{z} - \frac{1-i}{2}z = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{1-i}{2}z$$

$$\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = \left|z - \frac{1+i}{2}\right|^2 = \left(z - \frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{z} - \frac{1-i}{2}\right) = |z|^2 - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{(1+i)(1-i)}{4}$$

$$= \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{1-i}{2}z - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{(1+i)(1-i)}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble des solutions est le cercle centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Deuxième méthode

Soit M le point d'affixe z, N le point d'affixe iz et A le point d'affixe i, ces trois points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à ce qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow z - i = \lambda(iz - i) \Leftrightarrow z - i\lambda z = i - i\lambda \Leftrightarrow z = \frac{i(1-\lambda)}{1-i\lambda}$$

$$\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \left|z - \frac{1+i}{2}\right| = \left|\frac{i(1-\lambda)}{1-\lambda i} - \frac{1+i}{2}\right| = \left|\frac{2i(1-\lambda) - (1+i)(1-\lambda i)}{2(1-\lambda i)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{2i(1-\lambda) - (1 - \lambda i + i + \lambda)}{1-\lambda i}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-1-\lambda+i(2-2\lambda+\lambda-1)}{1-\lambda i}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{-1-\lambda+i(1-\lambda)}{1-\lambda i}\right| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1-\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-2\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2+2\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et l'ensemble des points est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2 :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \lambda \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right).\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM} = \lambda$$

Comme I est le milieu de $[A, B]$, $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI}$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \lambda \Leftrightarrow -\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI} + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \lambda \Leftrightarrow -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \lambda \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \lambda + \left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$$

Si $\lambda > -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$ alors l'ensemble des solutions est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda + \left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2}$

Si $\lambda = -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$ alors l'ensemble des solutions est le point I.

Si $\lambda < -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$ alors l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3 :

1. Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M' = t(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ t(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $z'' = kz' + b$

   On a

$$\begin{cases} M' = t(M) \\ h \circ t(M) = h\big(t(M)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = kz' + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = k(z + a) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = kz + ka + b \end{cases}$$

   On en déduit que $h \circ t$ est une homothétie de rapport k.

   Question non demandée : quel est son centre ?

   Pour cela on cherche son point fixe Ω_1 d'affixe ω_1

$$\omega_1 = k\omega_1 + ka + b \Leftrightarrow \omega_1(1 - k) = ka + b \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{ka + b}{1 - k}$$

   Si de plus on exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1 - k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_1 = \frac{ka + b}{1 - k} = \frac{ka + \omega(1 - k)}{1 - k} = \omega + \frac{ka}{1 - k}$$

   Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M' = h(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = t \circ h(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $z' = kz + b$

$$\begin{cases} M' = h(M) \\ t \circ h(M) = t\big(h(M)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = z' + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = kz + b + a \end{cases}$$

   On en déduit que $t \circ h$ est une homothétie de rapport k.

   Question non demandée : quel est son centre ?

   Pour cela on cherche le point fixe Ω_2 d'affixe ω_2

$$\omega_2 = k\omega_2 + a + b \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{a + b}{1 - k}$$

   Si de plus on exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1 - k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_2 = \frac{a + b}{1 - k} = \frac{a + \omega(1 - k)}{1 - k} = \omega + \frac{a}{1 - k}$$

Allez à : Exercice 3

2. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''.

   Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b'$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' car $kk' \neq 1$.

Le centre de h a pour affixe ω et celui de h' a pour affixe ω' tels que

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \dfrac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb + b' = kk'z + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega$$

Le centre de $h \circ h'$ est le point fixe Ω'' d'affixe ω''

$$\omega'' = kk'\omega'' + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega \Leftrightarrow \omega'' = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'}$$

$$\begin{aligned} \omega'' - \omega &= \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'} - \omega = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega - (1-kk')\omega}{1-kk'} \\ &= \frac{k(1-k')\omega' - k\omega + kk'\omega}{1-kk'} = \frac{k\omega'(1-k') - k\omega(1-k')}{1-kk'} \\ &= \frac{k(1-k')}{1-kk'}(\omega' - \omega) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$

Donc les trois centres sont alignés.

Allez à : Exercice 3

3. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''. Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b' = z + kb + b'$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $kb + b'$

On peut, si on veut exprimer l'affixe de ce vecteur en fonction de ω et de ω' les affixes des centres des deux homothéties. On a

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \dfrac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb + b' = z + (k-1)\omega' + (1-k)\omega = z + (1-k)(\omega - \omega')$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4 :

M, N et P sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{PN}$ ce qui équivaut à

$$z - 2i = \lambda(iz - 2i) \Leftrightarrow z - i\lambda z = 2i - 2i\lambda \Leftrightarrow z = 2i\frac{1-\lambda}{1-i\lambda}$$

$$\begin{aligned}|z-(1+i)| &= \left|2i\frac{1-\lambda}{1-i\lambda}-(1+i)\right| = \left|\frac{2i(1-\lambda)-(1-i\lambda)(1+i)}{1-i\lambda}\right| \\ &= \left|\frac{2i(1-\lambda)-(1+i-i\lambda+\lambda)}{1-i\lambda}\right| = \left|\frac{-(1+\lambda)+i(2-2\lambda+\lambda-1)}{1-i\lambda}\right| \\ &= \left|\frac{-(1+\lambda)+i(1-\lambda)}{1-i\lambda}\right| = \frac{\sqrt{(1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2+2\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Les points M sont sur le cercle de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5 :

1. $-j^2 = e^{i\pi}e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, son point fixe vérifie $r(\Omega)=\Omega$ donc $\omega = -j^2\omega + 1 + j^2$, ce qui entraine que :
$$\omega = \frac{1+j^2}{1+j^2} = 1$$
2. L'affixe de $s(\Omega)$ est
$$-j^2 \times \overline{1} + 1 + j^2 = -j^2 + 1 + j^2 = 1$$
Ce qui montre que
$$s(\Omega) = \Omega$$
Autrement dit Ω est un point fixe de s.
3. L'affixe de l'image par s d'un point M est de la forme $a\overline{z}+b$, de plus
$$a\overline{b} + b = -j^2\left(\overline{1+j^2}\right) + 1 + j^2 = -j^2(1+j) + 1 + j^2 = -j^2 - j^3 + 1 + j^2 = 0$$
Donc s est une symétrie orthogonale.
4. Soit $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2\overline{z} + 1 + j^2$. Soit $M'' = r(M') = r\circ s(M)$ d'affixe $z'' = -j^2z' + 1 + j^2$, on a
$$z'' = -j^2z' + 1 + j^2 = -j^2(-j^2\overline{z} + 1 + j^2) + 1 + j^2 = j^4\overline{z} - j^2 - j^4 + 1 + j^2 = j\overline{z} + 1 - j$$
C'est de la forme $a\overline{z}+b$, il reste à vérifier que $a\overline{b}+b=0$ pour montrer qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale.
$$a\overline{b} + b = j\left(\overline{1-j}\right) + 1 - j = j(1-j^2) + 1 - j = j - j^3 + 1 - j = 0$$
$r\circ s$ est une symétrie orthogonale.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6 :

1. z' est de la forme $az+b$ donc f est une similitude directe.
$\left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$ est le rapport de la similitude
Son centre d'affixe a vérifie
$$a = \left(-1+i\sqrt{3}\right)a - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2-i\sqrt{3}\right)a = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} = \frac{\left(-i\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{4+3} = \frac{3}{7} - \frac{2i\sqrt{3}}{7}$$

2. $\left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$

$$z' = 2\left(\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On appelle h l'homothétie de centre O rapport est 2, à un point M d'affixe z elle associe le point M' d'affixe $z' = 2z$

On appelle r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (car $\frac{2\pi}{3}$ est un argument du complexe de module 1 : $e^{\frac{2i\pi}{3}}$), à un point M d'affixe z elle associe le point d'affixe M' d'affixe $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$M'' = h\big(r(M)\big) \quad \text{et} \quad M' = r(M)$$

Equivaut à

$$\begin{cases} z'' = 2z' \\ z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc

$$z'' = 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$$

On a bien $f = h \circ r$. Il reste à trouver le centre de la rotation, c'est-à-dire son point fixe Ω d'affixe ω qui vérifie

$$\omega = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega - i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega = -i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{-i\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-i\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$$

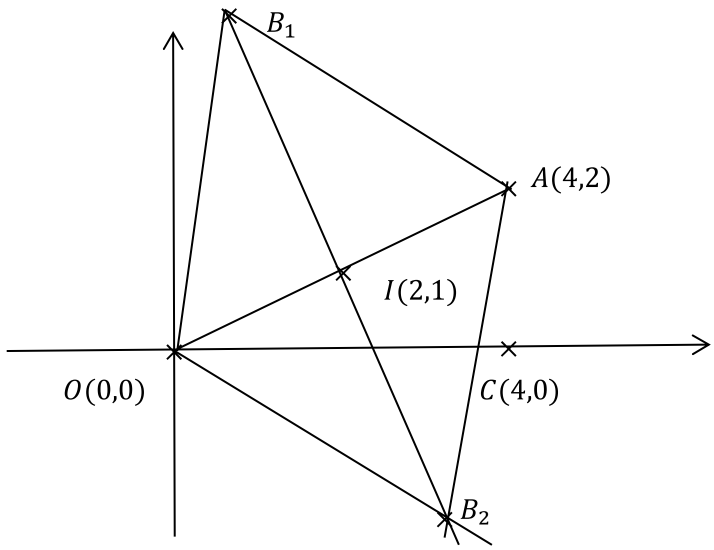
Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7 :

1. On cherche les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $f(M) = M$, ce qui équivaut à
$$z = -i\overline{z} + 1 + i \Leftrightarrow x + iy = -i(x - iy) + 1 + i = 1 - y + i(1 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1$$
Il s'agit d'une droite.
On cherche les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $g(M) = M$, ce qui équivaut à
$$z = i\overline{z} - 1 + i \Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) - 1 + i = -1 + y + i(1 + x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ y = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 + x$$
Il s'agit d'une droite.
2. On pose $M'' = f\big(g(M)\big)$ et $M' = f(M)$ donc
$$\begin{cases} z'' = -i\overline{z'} + 1 + i \\ z' = i\overline{z} - 1 + i \end{cases}$$
Par conséquent
$$z'' = -i\overline{(i\overline{z} - 1 + i)} + 1 + i = -i(-iz - 1 - i) + 1 + i = -z + i - 1 + 1 + i = -z + 2i$$
h est à la fois une homothétie de rapport -1 et une rotation d'angle π, l'affixe de son centre vérifie
$$z = -z + 2i \Leftrightarrow z = i$$
On peut remarquer que c'est l'intersection des deux droites invariante de f et g.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8 :



D’après le dessin il y a deux solutions

Première méthode (Mauvaise)

On appelle I le point d’affixe $2+i$, c’est le milieu de $[O,A]$

Les solutions sont sur la perpendiculaire à (OA), un point $M\ (x,y)$ de cette droite vérifie

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OA}=0 \Leftrightarrow (x-2)\times 4+(y-1)\times 2=0 \Leftrightarrow 4x+2y-10=0 \Leftrightarrow 2x+y-5=0$$

Pour que le triangle OAB soit équilatéral, on doit rajouter la condition $\|\overrightarrow{OB}\|=\|\overrightarrow{OA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$

$$\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Si ces deux distances sont égales la troisième $\|\overrightarrow{AB}\|$ sera égale au deux premières.

Donc

$$x^2+y^2=20$$

Il s’agit donc de trouver les points B vérifiant :

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

D’après la première équation, $y=-2x+5$, ce que l’on remplace dans la seconde.

$$x^2+(-2x+5)^2=20 \Leftrightarrow x^2+4x^2-20x+25=20 \Leftrightarrow 5x^2-20x+5=0 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$$

Les racines de cette équation sont

$$x_1=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=2-\sqrt{3}$$

On en déduit les ordonnées des points B solutions

$$y_1=-2\left(2+\sqrt{3}\right)+5=1-2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad y_2=-2\left(2-\sqrt{3}\right)+5=1+2\sqrt{3}$$

Donc les deux solutions sont

$$B_1\ \left(2+\sqrt{3},1-2\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad B_2\ \left(2-\sqrt{3},1+2\sqrt{3}\right)$$

Deuxième solution (La bonne)

Soit $\theta=\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Par conséquent l’affixe z de B vérifie

$$z=e^{i\theta}(4+2i)$$

Autrement dit $\overrightarrow{OB}=R_\theta\left(\overrightarrow{0A}\right)$, où R_θ est la rotation de centre O et d’angle θ.

Si $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ alors

$$z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+2i)=2+i+2i\sqrt{3}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+i\left(1+2\sqrt{3}\right)$$

Si $\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ alors

$$z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+2i)=2+i-2i\sqrt{3}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}+i\left(1-2\sqrt{3}\right)$$

Donc les deux solutions sont

$$B_1\ \left(2+\sqrt{3},1-2\sqrt{3}\right)\quad \text{et}\quad B_2\ \left(2-\sqrt{3},1+2\sqrt{3}\right)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9 :

Soit M est l'image de B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre A, soit M est l'image de B par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre A.

On pose $a=1+i$ l'affixe de A, $B=-1+2i$, l'affixe de B et $M(x,y)$ d'affixe $z=x+iy$

Dans le premier cas

$$z-a=e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a)\Leftrightarrow z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+2i-(1+i)\right)+1+i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)+1+i$$

$$=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+1+i=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$$

La première solution est $M_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$

Dans le second cas

$$z-a=e^{-\frac{i\pi}{3}}(b-a)\Leftrightarrow z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+2i-(1+i)\right)+1+i=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)+1+i$$

$$=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+1+i=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$$

La seconde solution est $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10 :

1. soit ω un éventuel point fixe

   $\omega=a\omega+b\Leftrightarrow\omega(1-a)=b\Leftrightarrow\omega=\frac{b}{1-a}$

   Car $a\neq 1$ vu que $|a|\neq 1$.

   Donc f admet un unique point fixe.

2.

$$r(z)-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)\Leftrightarrow r(z)=e^{i\theta}z+\omega\left(1-e^{(i\theta)}\right)$$

3.

$$h(z)-\omega=\rho(z-\omega)\Leftrightarrow h(z)=e^{i\theta}z+\omega(1-\rho)$$

4.

$$r(z)=e^{i\theta}z+\omega\left(1-e^{(i\theta)}\right)$$
$$h(z)=\rho z+\omega(1-\rho)=z'$$

$$r\circ h(z)=r\big(h(z)\big)=r(z')=e^{i\theta}z'+\omega\big(1-e^{(i\theta)}\big)=e^{i\theta}\big(\rho z+\omega(1-\rho)\big)+\omega\big(1-e^{i\theta}\big)$$
$$=\rho e^{i\theta}z+\omega e^{i\theta}-\omega\rho e^{i\theta}+\omega-\omega e^{i\theta}=\rho e^{i\theta}z-\omega\rho e^{i\theta}+\omega=az-a\omega+\omega$$
$$=az+\omega(1-a)=az+\frac{b}{1-a}(1-a)=az+b=f(z)$$

Donc toute similitude directe de centre ω est la composée d'une rotation de centre ω et d'une homothétie de centre ω.

Il est important de montrer que le « a » et le « b » sont ceux de f.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11 :

1.

a) Soit $M'\ (x',y')$ l'image de $M\ (x,y)$ par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnés sont (a_1,a_2) avec $a=a_1+ia_2$.

On a :

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=a_1\\y'-y=a_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x+a_1\\y'=y+a_2\end{cases}$$

Ce qui montre qu'à un point M d'affixe z la translation de vecteur $\vec{u}=(a_1,a_2)$ on associe le point M' d'affixe $z+a$.

Allez à : Exercice 11

b) Soit $M'\ (x',y')$ l'image de $M\ (x,y)$ par l'homothétie de centre $\Omega\ (a_1,a_2)$ (avec $a=a_1+ia_2$) et de rapport λ, on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'}=\lambda\overrightarrow{\Omega M}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-a_1=\lambda(x-a_1)\\y'-a_2=\lambda(y-a_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=a_1+\lambda(x-a_1)\\y'=a_2+\lambda(y-a_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=a_1(1-\lambda)+\lambda x\\y'=a_2(1-\lambda)+\lambda y\end{cases}$$

Ce qui montre qu'à un point d'affixe M d'affixe z l'homothétie de centre $\Omega\ (a_1,a_2)$ (avec $a=a_1+ia_2$) et de rapport λ on associe le point M' d'affixe $\lambda z+(1-\lambda)a$.

Allez à : Exercice 11

c) Soit $M'\ (x',y')$ l'image de $M\ (x,y)$ par la rotation de centre Ω le point d'affixe $a=a_1+ia_2$, donc l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ est θ.

$$\overrightarrow{\Omega M}=(x-a_1,y-a_2)\qquad\text{et}\qquad\overrightarrow{\Omega M'}=(x'-a_1,y'-a_2)$$

Au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ on associe le complexe $z-a$ (avec $z=x+iy$) et au vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ on associe le vecteur $z'-a$ (avec $z'=x'+iy'$). L'angle entre $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ est θ donc

$$z'-a=e^{i\theta}(z-a)$$

Autrement dit l'image de $M\ (x,y)$ par la rotation de centre Ω le point d'affixe a est le point M' d'affixe

$$z'=a+e^{i\theta}(z-a)$$

Au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ on associe le complexe $z-a$ (avec $z=x+iy$) et au vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ on associe le vecteur $z'-a$ (avec $z'=x'+iy'$). L'angle entre $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ est θ donc

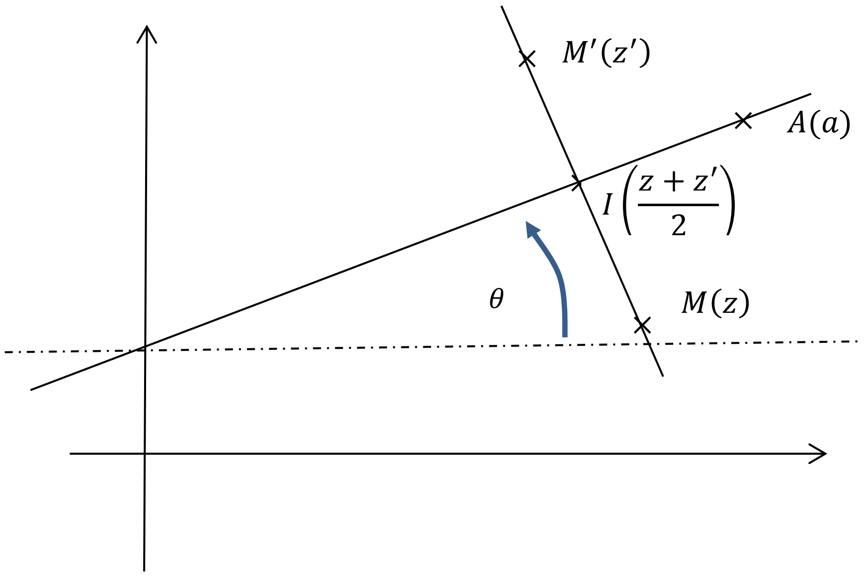
$$z'-a=e^{i\theta}(z-a)$$

Autrement dit l'image de $M\ (x,y)$ par la rotation de centre Ω le point d'affixe a est le point M' d'affixe

$$z'=a+e^{i\theta}(z-a)$$

Allez à : Exercice 11

d)



Un vecteur directeur de la droite passant par A faisant un angle θ avec l'axe des abscisses est $\overrightarrow{u(\theta)} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et donc d'affixe $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.

Le point I, milieu de $[M, M']$ a pour affixe $\frac{z+z'}{2}$, A est le point d'affixe a.

M' est le symétrique de M par la symétrie par rapport à la droite passant par A faisant un angle θ avec l'axe des abscisses si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u(\theta)}$ et si $\overrightarrow{IA}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u(\theta)}$, autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{IA} = 0$ et si $\det\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{u(\theta)}\right) = 0$

Nous allons utiliser les complexes, rappelons que si $\vec{u}$ a pour affixe a et $\vec{v}$ a pour affixe b alors :

$$Re(\overline{a}b) = \vec{u}.\vec{v} \quad \text{et} \quad Im(\overline{a}b) = \det(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u(\theta)} = 0 \\ \det\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{u(\theta)}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re\left(\overline{(z'-z)}e^{i\theta}\right) = 0 \\ Im\left(\overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(z'-z)}e^{i\theta} \in i\mathbb{R} \\ \overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{z'} - \overline{z})e^{i\theta} = -(z'-z)\overline{e^{i\theta}} \\ \overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta} = \overline{\overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{z'} - \overline{z})e^{i\theta} = -(z'-z)e^{-i\theta} \\ (2\overline{a} - \overline{z} - \overline{z'})e^{i\theta} = (2a - z - z')e^{-i\theta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} (\overline{z'} - \overline{z})e^{2i\theta} = -z' + z \\ (2\overline{a} - \overline{z} - \overline{z'})e^{2i\theta} = 2a - z - z' \end{cases}$$

Le but est de trouver z' en fonction du reste, il suffit de calculer $L_1 + L_2$

$$(2\overline{a} - 2\overline{z})e^{2i\theta} = 2a - 2z'$$

Ce qui donne

$$z' = a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}$$

Si M' est le symétrique de M, d'affixe z, par la symétrie par rapport à la droite passant par A faisant un angle θ avec l'axe des abscisses, alors M' est le point d'affixe

$$z' = a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}$$

Allez à : Exercice 11

2. Si on appelle $s: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui à z, l'affixe d'un point M, associe $z' = s(z)$, d'affixe M' le symétrique de M par la symétrie par rapport à la droite passant par A, d'affixe a et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses, on a
$$z' = s(z) = a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}$$
Si on appelle $s': \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui à z', l'affixe d'un point M', associe $z'' = s(z)$, d'affixe M'' le symétrique de M' par la symétrie par rapport à la droite passant par A', d'affixe a' et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses, on a
$$s'(z') = a' - \left(\overline{a'} - \overline{z'}\right)e^{2i\theta'}$$
L'image d'un point M par composée de la symétrie par rapport à la droite passant par A, d'affixe a, et faisant un angle θ par rapport à l'axe des abscisses et la symétrie par rapport à la droite passant par A', d'affixe a', et faisant un angle θ' avec l'axe des abscisses est le point M'', d'affixe z'' qui vérifie
$$z'' = s' \circ s(z) = s'(z') = a' - \left(\overline{a'} - \overline{z'}\right)e^{2i\theta'} = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}}\right)e^{2i\theta'}$$
$$= a' - \left(\overline{a'} - \overline{a} + (a - z)e^{-2i\theta}\right)e^{2i\theta'} = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - (a - z)e^{2i(\theta' - \theta)}$$
Si $\theta' = \theta[\pi] \Leftrightarrow \theta' = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (ce qui est équivalent à dire que $2(\theta' - \theta) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) alors
$$z'' = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta} - (a - z) = z + a' - a - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta}$$
Ce qui montre que $s' \circ s(z)$ est l'affixe d'un point M'' tel que
$$\overrightarrow{MM''} = \vec{u}$$
$a' - a - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta}$ étant l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
Si $\theta \neq \theta'\ [\pi] \Leftrightarrow \theta - \theta' \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors
$$z'' = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} + (z - a)e^{2i(\theta' - \theta)} = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)} + ze^{2i(\theta' - \theta)}$$
Pour pouvoir affirmer qu'il s'agit de l'affixe d'un point M'' qui soit l'image d'un point M par une rotation de centre b et d'angle α , il faut montrer que
$$z'' = b + (z - b)e^{i\alpha} = b\left(1 - e^{i\alpha}\right) + ze^{i\alpha}$$
Il suffit de poser
$$\begin{cases} b\left(1 - e^{i\alpha}\right) = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)} \\ e^{i\alpha} = e^{2i(\theta' - \theta)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\left(1 - e^{2i(\theta' - \theta)}\right) = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)} \\ e^{i\alpha} = e^{2i(\theta' - \theta)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)}}{1 - e^{2i(\theta' - \theta)}} \\ \alpha = 2(\theta' - \theta) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
Cela montre que, dans ce cas, la composée de deux symétries est bien une rotation.
Certes l'expression de b, l'affixe du centre, est assez obscure mais nous allons voir que ce point est bien celui que vous avez vu au lycée.
Pour introduire un peu de symétrie dans l'expression de b, on va multiplier le numérateur et le dénominateur par $e^{2i\theta}$
$$b = \frac{e^{2i\theta}\left(a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)}\right)}{e^{2i\theta}\left(1 - e^{2i(\theta' - \theta)}\right)} = \frac{a'e^{2i\theta} - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i(\theta + \theta')} - ae^{2i\theta'}}{e^{2i\theta} - e^{2i\theta'}}$$
Remarque : (non demandée par l'énoncé)
Déterminons le point d'intersection des droites D_θ, droite passant par le point A, d'affixe a et faisant en angle θ avec l'axe des abscisse et la droite $D_{\theta'}$ (droite passant par le point A', d'affixe a') et faisant en angle θ' avec l'axe des abscisse. Soit $B \in D_\theta \cap D_{\theta'}$

$B\in D_\theta\cap D_{\theta'}\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\exists\lambda'\in\mathbb{R},$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u(\theta)}\\ \overrightarrow{A'B}=\lambda'\overrightarrow{u(\theta')}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=\lambda e^{i\theta}\\ b-a'=\lambda' e^{i\theta'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+\lambda e^{i\theta}\\ b=a'+\lambda' e^{i\theta'}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+\lambda e^{i\theta}\\ a+\lambda e^{i\theta}=a'+\lambda' e^{i\theta'}\end{cases}$$

Le but est de trouver λ (ou λ') afin de trouver B. Seulement voilà, il n'y a qu'une équation et deux inconnue ($a+\lambda e^{i\theta}=a'+\lambda' e^{i\theta'}$). Mais il s'agit d'une inconnue complexe, cette équation est en fait deux équations l'équation de l'égalité des parties réelles et l'égalité des parties imaginaires. Il y a un moyen de trouver λ (où λ') avec une petite astuce, considérons le conjugué de cette équation $\overline{a+\lambda e^{i\theta}}=\overline{a'+\lambda' e^{i\theta'}}\Leftrightarrow\overline{a}+\lambda e^{-i\theta}=\overline{a'}+\lambda' e^{-i\theta'}$ car λ et λ' sont réels. Par conséquent λ et λ' vérifient

$$\begin{cases}a+\lambda e^{i\theta}=a'+\lambda' e^{i\theta'}\\ \overline{a}+\lambda e^{-i\theta}=\overline{a'}+\lambda' e^{-i\theta'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda e^{i\theta}-\lambda' e^{i\theta'}=a'-a\\ \lambda e^{-i\theta}-\lambda' e^{-i\theta'}=\overline{a'}-\overline{a}\end{cases}$$

Appliquons le bon vieux théorème de Cramer (à condition que cela marche)

$$\begin{vmatrix}e^{i\theta}&-e^{i\theta'}\\ e^{-i\theta}&-e^{-i\theta'}\end{vmatrix}=-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}=-\left(e^{i(\theta-\theta')}-e^{-i(\theta-\theta')}\right)=-2i(\sin(\theta-\theta'))\neq0$$

Car $\theta-\theta'\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$

On peut y aller avec le théorème de Cramer (qui marche même avec des complexes)

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{\begin{vmatrix}a'-a&-e^{i\theta'}\\ \overline{a'}-\overline{a}&-e^{-i\theta'}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{i\theta}&-e^{i\theta'}\\ e^{-i\theta}&-e^{-i\theta'}\end{vmatrix}}=\dfrac{-e^{-i\theta'}(a'-a)+e^{i\theta'}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\\ \lambda'=\dfrac{\begin{vmatrix}-e^{i\theta'}&a'-a\\ -e^{-i\theta'}&\overline{a'}-\overline{a}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{i\theta}&-e^{i\theta'}\\ e^{-i\theta}&-e^{-i\theta'}\end{vmatrix}}=\dfrac{-\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)e^{i\theta'}+(a'-a)e^{-i\theta'}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\end{cases}$$

Par conséquent

L'affixe de B est

$$\begin{aligned}b&=a+\frac{-e^{-i\theta'}(a'-a)+e^{i\theta'}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}e^{i\theta}\\
&=\frac{a\left(-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}\right)+\left(-e^{-i\theta'}(a'-a)+e^{i\theta'}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)\right)e^{i\theta}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\\
&=\frac{-ae^{i(\theta-\theta')}+ae^{-i(\theta-\theta')}-e^{i(\theta'-\theta)}(a'-a)+e^{i(\theta+\theta')}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\\
&=\frac{ae^{i(\theta-\theta')}-ae^{i(\theta'-\theta)}-a'e^{i(\theta'-\theta)}+ae^{i(\theta'-\theta)}-\overline{a'}e^{i(\theta-\theta')}+\overline{a}e^{i(\theta-\theta')}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\\
&=\frac{ae^{i(\theta-\theta')}-a'e^{i(\theta'-\theta)}-\overline{a'}e^{i(\theta-\theta')}+\overline{a}e^{i(\theta-\theta')}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\\
&=\frac{ae^{i(\theta-\theta')}-a'e^{i(\theta'-\theta)}-\overline{a'}e^{i(\theta-\theta')}+\overline{a}e^{i(\theta-\theta')}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\times\frac{e^{i(\theta+\theta')}}{e^{i(\theta+\theta')}}\\
&=\frac{-ae^{2i\theta'}+\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)e^{2i(\theta+\theta')}+a'e^{2i\theta}}{-e^{2i\theta}+e^{2i\theta'}}=\frac{a'e^{2i\theta}-\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)e^{2i(\theta+\theta')}-ae^{2i\theta'}}{e^{2i\theta}-e^{2i\theta'}}\end{aligned}$$

C'est justement le centre de la rotation.

Allez à : Exercice 11

3. On a vu que l'image de M d'affixe z par la rotation r de centre Ω le point d'affixe a et d'angle θ est le point M' d'affixe $z' = a + e^{i\theta}(z-a)$
Donc l'image de M', d'affixe z' par la rotation r' de centre Ω' le point d'affixe a' et d'angle θ' est le point M'' d'affixe $z'' = a' + e^{i\theta'}(z'-a')$
Donc l'image d'un point M, d'affixe z par $r' \circ r$ est le point M'' d'affixe
$$z'' = a' + e^{i\theta'}(z'-a') = a' + e^{i\theta'}\left(a + e^{i\theta}(z-a) - a'\right) = a' + (a-a')e^{i\theta'} + e^{i(\theta+\theta')}(z-a)$$
Si $\theta + \theta' = 0\ [2\pi]$ alors
$$z'' = a' + (a-a')e^{i\theta'} + z - a = z + (a-a')\left(e^{i\theta'} - 1\right)$$
Et alors $r' \circ r$ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $(a-a')\left(e^{i\theta'}-1\right)$
Si $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$ alors
$$z'' = a' + (a-a')e^{i\theta'} + e^{i(\theta+\theta')}(z-a) = a' + (a-a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')} + ze^{i(\theta+\theta')}$$
Pour pouvoir affirmer qu'il s'agit de l'affixe d'un point M'' qui soit l'image d'un point M par une rotation de centre b et d'angle α , il faut montrer que
$$z'' = b + (z-b)e^{i\alpha} = b\left(1 - e^{i\alpha}\right) + ze^{i\alpha}$$
Il suffit de poser
$$\begin{cases} b\left(1 - e^{i\alpha}\right) = a' + (a-a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')} \\ e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\theta')} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\left(1 - e^{i(\theta+\theta')}\right) = a' + (a-a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')} \\ e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\theta')} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a' + (a-a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')}}{1 - e^{i(\theta+\theta')}} \\ \alpha = \theta + \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
Cela montre que, dans ce cas, la composée de deux rotations est bien une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
Question non demandée : où est le centre ?
Certes, il s'agit du point B d'affixe b, mais encore.
Transformons un peu b
$$b = \frac{a' + (a-a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')}}{1 - e^{i(\theta+\theta')}} = \frac{a' + (a-a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} - e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}$$
$$= \frac{a'e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} + (a-a')e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} - e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$
Ainsi, l'expression
Donc

$$b-a=\frac{a'e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}+(a-a')e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}-a$$

$$=\frac{a'e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}+ae^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-a'e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}-a\left(e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$=\frac{ae^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-a'e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}+ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}=\frac{(a-a')e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-(a-a')e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$=\frac{(a-a')\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}=(a-a')e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\frac{\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$=(a-a')e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}=e^{i\frac{\theta}{2}}(a-a')\frac{\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

Ce qui montre que les droites vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ font un angle $\frac{\theta}{2}$ car $\frac{\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\in\mathbb{R}^+$.

De même (ou presque) en changeant les rôles de a et a' ainsi que ceux de θ et θ'.

$$b-a'=e^{i\frac{\theta'}{2}}(a'-a)\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

Ce qui montre que les droites vecteurs $\overrightarrow{\Omega' B}$ et $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ font un angle $\frac{\theta'}{2}$ car $\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\in\mathbb{R}^+$.

Cela permet de placer le point.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12 :

1.

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\Leftrightarrow\alpha(-1,2)+\beta(3,-4)=(-1,1)\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta=-1\\ 2\alpha-4\beta=1\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq0$$

Il s'agit donc d'un système de Cramer

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}$$

$$\vec{w}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\Leftrightarrow\vec{v}=-\vec{u}-2\vec{w}$$

2. On cherche α et β réels tels que

$$\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\Leftrightarrow\alpha(-1,2)+\beta(3,-4)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta=x\\ 2\alpha-4\beta=y\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Il s'agit donc d'un système de Cramer

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-4x - 3y}{-2} = 2x + \frac{3}{2}y$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} -1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-y - 2x}{-2} = x + \frac{1}{2}y$$

$$\vec{t} = \left(2x + \frac{3}{2}y\right)\vec{u} + \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{v}$$

D'après 1, $\vec{v} = -\vec{u} - 2\vec{w}$, donc

$$\vec{t} = \left(2x + \frac{3}{2}y\right)\vec{u} - \left(x + \frac{1}{2}y\right)(\vec{u} + 2\vec{w}) = (x+y)\vec{u} - (2x+y)\vec{w}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13 :

1. Un vecteur directeur de D est $\vec{u} = (1,-1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et un vecteur directeur de D' est $\vec{v} = (2,1) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
   On a $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et $s(\vec{v}) = \vec{v}$ ce qui équivaut à
   $$\begin{cases} s(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ s(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} s(\vec{\imath}) - s(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ 2s(\vec{\imath}) + s(\vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$$
   $L_2 + L_1$ donne $3s(\vec{\imath}) = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $2L_1 - L_2$ donne $-3s(\vec{\jmath}) = -4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$
   Ce qui donne
   $$\begin{cases} s(\vec{\imath}) = -\frac{1}{3}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} \\ s(\vec{\jmath}) = -\frac{4}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath} \end{cases}$$
   Donc
   $$S = \text{mat}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $\vec{e_1}$ est un vecteur directeur de D donc $s(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ est un vecteur directeur de D' donc $s(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}$
   Par conséquent
   $$S' = \text{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14 :

1. $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$
   Donc $r \circ s$ est une symétrie orthogonale.
2. Soit $\vec{u} = (x,y)$ un point invariant de $r \circ s$

$$\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(2\theta)\,x+\sin(2\theta)\,y=x\\ \sin(2\theta)\,x-\cos(2\theta)\,y=y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos(2\theta)-1)x+\sin(2\theta)\,y=0\\ \sin(2\theta)\,x-(\cos(2\theta)+1)y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sin^2(\theta)\,x+2\sin(\theta)\cos(\theta)\,y=0\\ 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,x-2\cos^2(\theta)\,y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sin^2(\theta)\,x+\sin(\theta)\cos(\theta)\,y=0\\ \sin(\theta)\cos(\theta)\,x-\cos^2(\theta)\,y=0\end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul, donc ces deux équations sont proportionnelles, soit $\sin(\theta)\neq 0$ soit $\cos(\theta)\neq 0$, donc on peut simplifier l'une ou l'autre des équations, finalement l'ensemble des points invariants est

$$\sin(\theta)\,x-\cos(\theta)\,y=0$$

Et $r\circ s$ est la symétrie orthogonale par rapport à cette droite.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15 :

1. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, pour tout $\lambda'\in\mathbb{R}$, pour tout $\vec{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et pour tout $\overrightarrow{u'}=(x',y')\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}s\left(\lambda\vec{u}+\lambda'\overrightarrow{u'}\right)&=s(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y')\\&=\left(\frac{2}{3}(\lambda x+\lambda'x')+\frac{1}{3}(\lambda y+\lambda'y'),\frac{4}{3}(\lambda x+\lambda'x')-\frac{1}{3}(\lambda y+\lambda'y')\right)\\&=\left(\lambda\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\right)+\lambda'\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'\right),\lambda\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y\right)+\lambda'\left(\frac{4}{3}x'-\frac{1}{3}y'\right)\right)\\&=\lambda\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y,\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y\right)+\lambda'\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y',\frac{4}{3}x'-\frac{1}{3}y'\right)=\lambda s(x,y)+\lambda's(x',y')\\&=\lambda s(\vec{u})+\lambda s\left(\overrightarrow{u'}\right)\end{aligned}$$

Donc s est linéaire.

2.

$$\vec{u}\in\ker(p)\Leftrightarrow p(\vec{u})=\vec{0}\Leftrightarrow PX=O=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -x+2y=0\Leftrightarrow x=2y$$

Donc $\vec{u}=(2y,y)=(2,1)$

Un vecteur directeur de $\ker(p)$ est $(2,1)=2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$

Soit $\vec{v}\in Im(p)$, il existe $\vec{u}=(x,y)$ tel que

$$\vec{v}=p(\vec{u})=(-x+2y,-x+2y)=(-x+2y)(1,1)=(x+y)(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})$$

Un vecteur directeur de $Im(p)$ est $(1,1)=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$

3.

$$s(\overrightarrow{e_1})=s(1,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)\quad\text{et}\quad s(\overrightarrow{e_2})=s(0,1)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Donc la matrice S est

$$S=\begin{array}{cc} \begin{matrix} s(\overrightarrow{e_1}) & s(\overrightarrow{e_2})\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} & \begin{matrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{matrix}\end{array}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

$$S^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=I$$

Et $s\neq\pm id$

Donc s est une symétrie.

Autre méthode

$$\det(S)=-\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(S)=a+d=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

Lorsque $S=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$

Entraine que s est une symétrie

4.

$$P^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2\end{pmatrix}=P$$

Et $p\neq id$ donc p est une projection

Autre méthode

$$\det(P)=-2+2=0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(P)=-1+2=1$$

Entraine que p est une projection

5. Si $\vec{u}=(x,y)$ pose $X=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$\vec{u}$ est invariant si et seulement si

$$s(\vec{u})=\vec{u}\Leftrightarrow SX=X\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=x \\ \frac{4x}{3}-\frac{y}{3}=y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}=0 \\ \frac{4x}{3}-\frac{4y}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow y=x$$

Donc $\vec{u}=(x,x)=x(1,1)$, par conséquent un vecteur invariant non nul de s est $(1,1)=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$

$$\vec{u}\in E\Leftrightarrow s(\vec{u})=-\vec{u}\Leftrightarrow SX=-X\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=-x \\ \frac{4x}{3}-\frac{y}{3}=-y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{3}+\frac{2y}{3}=0 \\ \frac{4x}{3}+\frac{2y}{3}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2x+y=0\Leftrightarrow y=-2x$$

Donc $\vec{u}=(x,-2x)=x(1,-2)$

Un vecteur directeur de E est $(1,-2)=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}$

6. La matrice M de f dans la base canonique est :

$$M=PS=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

7.

$$M^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 21 & -12 \\ 21 & -12\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}=M$$

Donc M est une projection.

Autre méthode

$$\det(M)=\frac{7}{3}\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}=0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(P)=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}=1$$

Entraine que f est une projection

8.

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas proportionnels donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$

On pose $X_{\overrightarrow{u_1}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ dans la base canonique

Les coordonnées de $f(\overrightarrow{u_1})$ dans la base β sont

$$MX_{\overrightarrow{u_1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}=X_{\overrightarrow{u_1}}$$

Donc $f(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{u_1}$

On pose $X_{\overrightarrow{u_2}}=\begin{pmatrix} 4 \\ 7\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ dans la base canonique

Les coordonnées de $f(\overrightarrow{u_2})$ dans la base β sont

$$MX_{\overrightarrow{u_2}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times X_{\overrightarrow{u_2}}$$

Donc $f(\overrightarrow{u_2}) = \vec{0}$

La matrice M' de f dans la base β' est donc

$$M' = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \end{array} \end{array}$$

Allez à : Exercice 15