Pascal Lainé

Calculs algébriques

Exercice 1 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Montrer que pour tout réels non nuls x et y :

$$\frac{2|x||y|}{x^2+y^2}\leq 1$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1=\{x\in\mathbb{R},x^2<1\}$$
$$A_2=\{x\in\mathbb{R},x^3\leq 1\}$$
$$A_3=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{2x}{x^2+1}<1\right\}$$
$$A_4=\left\{x\in\mathbb{R}^*,\frac{1}{|x|}>1\right\}$$
$$A_5=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{1}{x^2-1}<1\right\}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Trouver tous les réels x tels que $|x-1|+|x-2|=2$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Résoudre l'équation

$$\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}=10$$

Indication :

Malgré les apparences il n'est pas nécessaire de connaitre la valeur de 41^2

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

1. Résoudre

$$|u-1|+|u+1|=4$$

2. En déduire les solutions de

$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4$$

3. Puis les solutions de

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Démontrer que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ est un nombre irrationnel.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Montrer que $\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit

$$\alpha=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Montrer que $\alpha\in\sqrt{3}\mathbb{N}$ (C'est-à-dire de la forme $\sqrt{3}$ multiplié par un entier naturel).

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soit $\alpha=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Calculer α.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha=6+4\sqrt{2}$ et $\beta=6-4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ est rationnel.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$
2. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\notin\mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$
4. $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\notin\mathbb{Q}$. On rappelle que $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Montrer que $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soient a et b deux réels. On appelle $\alpha = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

Montrer que α est une racine d'une équation du troisième degré à coefficients réels

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = 0$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = -1$

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Montrer que pour tout réels x et y on a :
$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$$
2. Montrer que pour tout entier relatif on a :
$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$
On pourra distinguer les cas $m+n$ pair et $m+n$ impairs.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$E\left(\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2\right) = 4n+1$$
On pourra montrer que $E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Montrer que pour tout x et y réels on a :
$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$$
On pourra distinguer les cas
$\left(E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \text{ ou } E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1\right)$ et $\left(E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} \text{ ou } E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1\right)$.
Ce qui fait 4 cas (n'est-ce pas ?).

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx) \quad (*)$$
Où $E(y)$ est la partie entière du réel y.

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que
$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n}$$
On pourra appuyer son raisonnement en traçant la droite réelle et en plaçant
$$E(x), x, x + \frac{k}{n}, k \in \{0,1,..,n-1\}, E(x) + 1 \text{ et } x + \frac{p+1}{n}$$
2. En déduire que
$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p$$
Et $E(nx)$ en fonction de n, $E(x)$ et p.

3. Calculer $E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et calculer $E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$.
4. En coupant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ en 2, montrer l'égalité $(*)$.

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier strictement positif.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus que deux racines réelles si n est pair et plus que trois racines si n est impairs.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

1. Factoriser $a^n - b^n$ en $a - b$ et un autre facteur que l'on précisera.
2. Application : factoriser, en justifiant les réponses, les sommes suivantes. $n \in \mathbb{N}$

$$A = a^n - 1 \qquad B = a^{2n+1} + 1$$

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)k$$

2. On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$
   a. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$
   b. Calculer alors

   $$T_n = \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$$

   En fonction de S_n.
   c. Que peut-on en déduire pour T_n ?

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que

$$\sum_{1 \le k, l \le n} |k - l| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k-1} (k-l) + \sum_{l=k}^{n} (l-k) \right)$$

b. Montrer que

$$\sum_{l=1}^{k-1} (k-l) + \sum_{l=k}^{n} (l-k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p$$

c. En déduire que

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}(l-k)=k^2-(n+1)k+\frac{n(n+1)}{2}$$

d. On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{1\le k,l\le n}|k-l|=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

1. Soit k un entier compris entre 2 et $n+1$. Montrer que :

$$k(k-1)\binom{n+1}{k}=(n+1)n\binom{n-1}{k-2}$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=2}^{n+1}k(k-1)\binom{n+1}{k}$$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Soient $m,n\in\mathbb{N}$, $m\le n$. Montrer sans calculs que

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

En utilisant la formule pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\binom{n-k+1}{m+1}=\binom{n-k}{m}+\binom{n-k}{m+1}$$

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Démontrer que pour tout $n,p,k\in\mathbb{N}$, $n\ge p\ge k$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Soient a et b deux réels et n un entier naturel.

1. Exprimer $(a+b)^n$ en fonction de $k\in\mathbb{Z}$.
2. Calculer, en justifiant les réponses :

$$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\quad \text{et}\quad B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

1. Montrer que pour tout n et $k \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$$
En déduire que :
$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$
2. Montrer, en détaillant les calculs que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$
Allez à :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :
$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = 2(a+b) - \left(a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b\right) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$
Ces deux expressions ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{2}\sqrt{a+b}$) sont positives donc
$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$
Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$
La dernière assertion est vraie donc la première aussi.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :
$$(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2 \geq 2|x||y| \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2|x||y| \Leftrightarrow \frac{2|x||y|}{x^2+y^2} \leq 1$$
Car x et y non nul entraine que $x^2+y^2 \neq 0$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :
$$A_1 =]-1,1[$$
$$A_2 =]-\infty, 1]$$

$$1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, 1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2>0\Leftrightarrow\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$A_3=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|}>1\Leftrightarrow|x|<1$$

$$A_4=]-1,0[\cup]0,1[$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$1-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2=\frac{(x^2-1)^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-1)^2}>0$$

Comme x^2-2 est positif si et seulement si $x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

Donc

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2<1\Leftrightarrow1-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$$

Par conséquent

$$A_5=\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

On pose $f(x)=|x-1|+|x-2|$

Pour $x\le1$, $x-1\le0$ et $x-2\le-1<0$ donc

$$f(x)=-(x-1)-(x-2)=-2x+3$$

Pour $1\le x\le2$, $x-1\ge0$ et $x-2\le0$ donc

$$f(x)=|x-1|+|x-2|=x-1-(x-2)=1$$

Pour $x\ge2$, $x-1\ge1>0$ et $x-2\ge0$ donc

$$f(x)=|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2x-3$$

Puis on va résoudre $f(x)=2$ sur chacun des trois intervalles.

$$\begin{cases}f(x)=2\\x\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3=2\\x\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x\le1\end{cases}$$

$\frac{1}{2}\le1$ donc $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\begin{cases}f(x)=2\\1\le x\le2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=2\\1\le x\le2\end{cases}$$

Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

$$\begin{cases}f(x)=2\\2\le x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3=2\\2\le x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\2\le x\end{cases}$$

$2\le\frac{5}{2}$ donc $\frac{5}{2}$ est solution.

Les réels qui vérifient $|x-1|+|x-2|=2$ sont $\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

Les éventuelles solutions vérifient $41-x\geq 0$ et $41+x\geq 0$, autrement dit $-41\leq x\leq 41$, ce sera bien le cas des deux solutions trouvées.

Comme ces deux expressions sont positives on a

$$\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}=10\Leftrightarrow\left(\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}\right)^2=100\Leftrightarrow 41-x+2\sqrt{41-x}\sqrt{41+x}+41+x=100$$
$$\Leftrightarrow 82+2\sqrt{41^2-x^2}=100\Leftrightarrow 2\sqrt{41^2-x^2}=18\Leftrightarrow\sqrt{41^2-x^2}=9\Leftrightarrow 41^2-x^2=9^2$$
$$\Leftrightarrow 41^2-9^2=x^2\Leftrightarrow x^2=(41-9)(41+9)\Leftrightarrow x^2=32\times 50=16\times 100=(4\times 10)^2\Leftrightarrow x=\pm 40$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. On pose $f(u)=|u-1|+|u+1|$

   Si $u<-1$, $u-1<0$ et $u+1<0$ alors $f(u)=-(u-1)-(u+1)=-2u$
   $$\forall u<-1, f(u)=4\Leftrightarrow -2u=4\Leftrightarrow u=-2$$
   Si $-1\leq u\leq 1$, , $u-1<0$ et $u+1>0$ alors $f(u)=-(u-1)+(u+1)=2$

   $f(u)=4$ n'a pas de solution

   Si $u>1$, $u-1>0$ et $u+1>0$ alors $f(u)=(u-1)+(u+1)=2u$
   $$\forall u>1, f(u)=4\Leftrightarrow 2u=4\Leftrightarrow u=2$$
   Il y a deux solutions -2 et 2.
2. D'après la première question il faut et il suffit de résoudre
   $$\sqrt{x+1}=-2\quad\text{et}\quad\sqrt{x+1}=2$$
   $\sqrt{x+1}=-2$ n'a pas de solution réelle et $\sqrt{x+1}=2$ équivaut à $x+1=4$, c'est-à-dire à $x=3$.
3.
   $$x+2-2\sqrt{x+1}=x+1-2\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$$
   Et
   $$x+2+2\sqrt{x+1}=x+1\mp\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$$
   Par conséquent
   $$\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}=4$$
   $$\Leftrightarrow\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4\Leftrightarrow x=3$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

Supposons que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ soit un nombre rationnel, il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}^*$, on peut supposer qu'ils sont positifs tous les deux

tels que
$$\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}=\frac{p}{q}$$
On élève au cube
$$3+2\sqrt{6}=\frac{p^3}{q^3}\Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}=\frac{p^3}{q^3}\Leftrightarrow\sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{q^3}-3\right)$$
Ce qui signifie que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il existe $p_1\in\mathbb{N}$ et $q_1\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1}$$

On peut supposer que p_1 et q_1 ne sont pas tous les deux pairs sinon on peut simplifier par 2.

$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1}\Leftrightarrow 6q_1^2=p_1^2\quad (1)$$

Si p_1 est impair, son carré est aussi impair ce qui est impossible d'après (1) donc $p_1$est pair et donc q_1 est impair, il existe p_2 tel que $p_1=2p_2$ et q_2 tel que $q_1=2q_2+1$, ce que l'on remplace dan (1)

$$6(2q_2+1)^2=4p_2^2\Leftrightarrow 3(4q_2^2+4q_2+1)=2p_2^2\Leftrightarrow 3=2p_2^2-12q_2^2-12q_2$$

Ce qui est impossible, donc $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ n'est pas un nombre rationnel.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

$$\alpha^2=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=7+4\sqrt{3}+2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}+7-4\sqrt{3}$$

$$=14+2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=14+2\sqrt{7^2-4^2\times 3}=14+2\sqrt{49-48}$$

$$=14+2\times 1=16$$

Les deux valeurs possibles de α sont $\alpha=-4$ et $\alpha=4$, comme $\alpha>0$, on a

$$\alpha=4\in\mathbb{Z}$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\alpha^2=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=8+2\sqrt{4^2-2^2\times 3}=8+2\sqrt{4}=12$$

Donc $\alpha=2\sqrt{3}$ car $\alpha>0$ et $2\in\mathbb{N}$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

$$\alpha^2=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4-2\sqrt{3}-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=8-2\sqrt{4^2-2^2\times 3}$$

$$=8-2\sqrt{4}=8-4=4$$

Donc $\alpha=\pm 2$ or $4-2\sqrt{3}<4+2\sqrt{3}$ entraine que $\alpha=-2$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. Si α est rationnel alors

$$\sqrt{2}=\frac{\alpha-6}{4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.
Si β est rationnel alors

$$\sqrt{2}=\frac{\beta-6}{-4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.
Donc α et β sont irrationnel.

2.

$$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})}=\sqrt{6^2-4^2\times 2}=\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=2\in\mathbb{Q}$$

3.

$$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=6+4\sqrt{2}+4+6-4\sqrt{2}=16$$

Comme $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=4\in\mathbb{Q}$.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$$
Puis on élève au carré
$$2=\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p}{q}\sqrt{3}+3$$
On isole $\sqrt{3}$
$$\sqrt{3}=-\frac{q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2}-1\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction, par conséquent
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$$
Je rappelle que le raisonnement suivant est faux
$$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\quad\text{et}\quad\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$$

2. Si $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{p}{q}$$
On élève au carré
$$2+2\sqrt{6}+3=\frac{p^2}{q^2}$$
On isole $\sqrt{6}$
$$\sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{p^2}{q^2}\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il y a une contradiction donc
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\notin\mathbb{Q}$$
3. Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}-\sqrt{6}$$
Puis on élève au carré
$$2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3=\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p}{q}\sqrt{6}+6$$
Ce qui équivaut à
$$5+2\sqrt{6}+\frac{2p}{q}\sqrt{6}=6+\frac{p^2}{q^2}$$

Soit encore

$$\sqrt{6}=\frac{1+\frac{p^2}{q^2}}{2+\frac{2p}{q}}$$

Ce qui montre que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction par conséquent

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$$

4. Si $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}$$

On développe le carré avec la formule $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$3^2\times 2+2^2\times 3+6+2\times 3\times 2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\times 3\sqrt{2}\sqrt{6}+2\times 2\sqrt{3}\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}$$

Puis

$$36+12\sqrt{6}+6\sqrt{12}+4\sqrt{18}=\frac{p^2}{q^2}$$

En simplifiant et en arrangeant les choses

$$12\sqrt{6}+6\sqrt{2^2\times 3}+4\sqrt{3^2\times 2}=\frac{p^2}{q^2}-36$$

$$12\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$

$$\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{24}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$

Ce qui entraine que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question 3. Il y a une contradiction donc

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\notin\mathbb{Q}$$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

Supposons qu'il existe p et q des entiers naturels, non tous les deux pairs tels que

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

En élevant au carré on obtient

$$3=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow 3q^2=p^2\quad(*)$$

Si p est pair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3(4l^2+4l+1)=4k^2\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2\times 2k^2$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est pair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times 4l^2=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2\times 6l^2=2(2k^2+2k)+1$$

Le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times(4l^2+4l+1)=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2(2k^2+2k)+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)=2(2k^2+2k)\Leftrightarrow 6l^2+6l+1=2k^2+2k\Leftrightarrow 2(3l^2+3l)+1=2(k^2+k)$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

$$\alpha^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+b=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b+3\sqrt[3]{ab}\alpha$$

Donc α vérifie

$$\alpha^3-3\sqrt[3]{ab}\alpha-a-b=0$$

Donc α est solution de

$$X^3-3\sqrt[3]{ab}X-a-b=0$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. Pour tous les entiers relatifs $E(x)=x$ et donc $E(-x)=-x$, donc $E(x)+E(-x)=0$
2. Pour tous réels

$$E(x)\le x<E(x)+1$$

Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte

$$E(x)<x<E(x)+1$$

On multiplie cette inégalité par -1

$$-E(x)-1<-x<-E(x)$$

Cela montre que

$$E(-x)=-E(x)-1$$

Par conséquent

$$E(x)+E(-x)=-1$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. On a

$$\begin{cases}E(x)\le x<E(x)+1\\E(y)\le y<E(y)+1\end{cases}$$

En faisant la somme

$$E(x)+E(y)\le x+y<E(x)+E(y)+2\quad(*)$$

Donc

$$E(x+y)=E(x)+E(y)\quad\text{ou}\quad E(x+y)=E(x)+E(y)+1$$

Car ce sont les deux seuls entiers dans l'intervalle

$$[E(x)+E(y),E(x)+E(y)+2[$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

Si dans $(*)$ on prend la partie entière, on obtient

$$E\big(E(x)+E(y)\big)\le E(x+y)\le E(E(x)+E(y)+2)$$

On est obligé de changer le « $<$ » en « $\le$ » dans la seconde égalité, à moins de préciser que $E(x)+E(y)+2$ est un entier et alors l'inégalité reste stricte.

Puis comme $E(x)+E(y)$ et $E(x)+E(y)+2$ sont des entiers

$$E\big(E(x)+E(y)\big)=E(x)+E(y)\quad\text{et}\quad E(E(x)+E(y)+2)=E(x)+E(y)+2$$

Et on obtient

$$E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+2$$

Ce qui n'est exactement ce que l'on demandait.

Beaucoup d'entre vous semble croire que

$$E(E(x)+E(y)+2)=E\big(E(x)\big)+E\big(E(y)\big)+E(2)=E(x)+E(y)+2$$

C'est correct uniquement parce que $E(x)$, $E(y)$ et 2 sont des entiers, mais il est faux de penser que pour tout x et y, $E(x+y)=E(x)+E(y)$ (enfin ce n'est pas toujours vrai).

2. Si $m+n$ est pair alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $m+n=2p$ alors

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2p}{2}\right)+E\left(\frac{2p-m-m+1}{2}\right)=E(p)+E\left(\frac{2p-2m+1}{2}\right)$$
$$=p+E\left(p-m+\frac{1}{2}\right)=p+p-m=2p-m=n$$

Si $m+n$ est impair alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $m+n=2p+1$

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2p+1}{2}\right)+E\left(\frac{2p+1-m-m+1}{2}\right)$$
$$=E\left(p+\frac{1}{2}\right)+E\left(\frac{2p-2m+2}{2}\right)=p+E(p-m+1)=p+p-m+1$$
$$=2p-m+1=n$$

Dans tous les cas on a

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$$

3.

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=E\left(n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1\right)=E\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$=2n+1+E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2=4n(n+1)=4n^2+4n$$

Or

$$4n^2\le 4n^2+4n<4n^2+4n+1$$

Ce qui équivaut à

$$2n\le 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$

Par conséquent

$$E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)=2n$$

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

- Premier cas :

$$E(x)\le x<E(x)+\frac{1}{2}\ (*)\quad\text{et}\quad E(y)\le y<E(y)+\frac{1}{2}\quad(**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)\le x+y<E(x)+E(y)+1$$

On en déduit que

$$E(x+y)=E(x)+E(y)$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) \le 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x)$$
$$2E(y) \le 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) = E(x) + E(y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) = E(2x) + E(2y)$$
$$\le E(2x) + E(2y)$$

- Deuxième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \le x < E(x) + 1 \ (*) \quad \text{et} \quad E(y) \le y < E(y) + \frac{1}{2} \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \le x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \le E(x+y) \le E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) + 1 \le 2x < 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1$$
$$2E(y) \le 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \le E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 1 + 2E(y) = E(2x) + E(2y)$$
$$\le E(2x) + E(2y)$$

- Troisième cas :

$$E(x) \le x < E(x) + \frac{1}{2} (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \le y < E(y) + 1 \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \le x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \le E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) \le 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x)$$
$$2E(y) + 1 \le 2y < 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \le E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 = E(2x) + E(2y)$$
$$\le E(2x) + E(2y)$$

- quatrième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \le x < E(x) + 1 (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \le y < E(y) + 1 \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + 1 \le x + y < E(x) + E(y) + 2$$

On en déduit que

$$E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) + 1 \le 2x \le 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1$$
$$2E(y) + 1 \le 2y \le 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) = E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 \le 2E(x) + 1 + E(y) + 1$$
$$= E(2x) + E(2y)$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. Les ensembles $I_k = \left]x + \frac{k}{n}, x + \frac{k+1}{n}\right]$, $k \in \{0,1,..,n-1\}$ sont disjoints deux à deux et la réunion de ces intervalles est $]x, x+1]$, comme $E(x) + 1 \in]x, x+1]$ et que ces ensembles sont disjoints, $E(x) + 1$ appartient à un et un seul de ces ensembles, donc il existe un unique $p \in \{0,1, \dots, n-1\}$ tel que
$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n} \quad (**)$$
Remarque : l'ensemble des intervalle I_k, $k \in \{0,1,..,n-1\}$ forme une partition de $]x, x+1]$.
2. En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \Leftrightarrow nx + p < nE(x) + n \Leftrightarrow nx < nE(x) + n - p$$
En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n} \Leftrightarrow nE(x) + n \leq nx + p + 1 \Leftrightarrow nE(x) + n - p - 1 \leq nx$$
En réunissant ces deux inégalités on trouve l'encadrement demandé par l'énoncé.
Comme
$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p \Leftrightarrow nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p - 1 + 1$$
On a
$$E(nx) = nE(x) + n - p - 1$$
3. Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$,
$$E(x) \leq x + \frac{k}{n} \leq x + \frac{p}{n} < E(x) + 1$$
Donc $E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(x)$
Pour tout $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$,
$$E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n} \leq x + \frac{k}{n} \leq x + \frac{n-1}{n} = x + 1 - \frac{1}{n} < x + 1 < E(x) + 1 + 1 = E(x) + 2$$
Donc
$$E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(x) + 1$$
4.
$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{p} E\left(x + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=p+1}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{p} E(x) + \sum_{k=p+1}^{n-1} (E(x) + 1)$$
$$= (p+1)E(x) + (n-1-p)(E(x)+1)$$
$$= (p+1)E(x) + n(E(x)+1) - (1+p)E(x) - 1 - p = nE(x) + n - 1 - p = E(nx)$$

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

Si n est pair, il existe $m \geq 1$ tel que $n = 2m$
$$P'(x) = 2mx^{2m-1} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = 2m(2m-1)x^{2m-2}$$
Comme $2m - 2$ est pair pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) > 0$ donc P' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $2m - 1$ est impair
$$\lim_{x \to -\infty} (2mx^{2m-1} + p) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (2mx^{2m-1} + p) = +\infty$$
P' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P'(\alpha) = 0$ et tel que
$$x < \alpha \Rightarrow P'(x) < 0 \quad \text{et} \quad x > \alpha \Rightarrow P'(x) > 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x^{2m} + px + q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (x^{2m} + px + q) = +\infty$$

Le tableau de variation de P est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\alpha) > 0$ alors P n'a pas de solution.
Si $P(\alpha) = 0$ alors P n'a qu'une solution : α.
Si $P(\alpha) < 0$ alors P a deux solutions.
Si n est pair, il existe $m \geq 0$ tel que $n = 2m + 1$

$$P'(x) = (2m+1)x^{2m} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = (2m+1)2mx^{2m-1}$$

Comme $2m - 1$ est impair :
Si $x < 0$ alors $P''(x) < 0$ et $x > 0$ alors $P''(x) > 0$. De plus $P'(0) = p$. Comme $2m$ est pair les limites de P' en $\pm\infty$ sont $+\infty$.
On en déduit le tableau de variation de P'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$P''(x)$		$-$	0	$+$	
$P'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	p	$\nearrow$	$+\infty$

Si $p \geq 0$ alors $\forall x \neq 0, P'(x) > 0$ et $P'(0) = 0$ ce qui montre que P est strictement croissante, comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

Cela montre que P est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.
Si $p < 0$ alors il existe deux réels $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$ et tels que le signe de P' soit strictement positif sur $]-\infty, \beta[\cup]\gamma, +\infty[$ et strictement négatif sur $]\beta, \gamma[$. comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de P

x	$-\infty$		β		γ		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(\beta)$	$\searrow$	$P(\gamma)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\beta)$ et $P(\beta)$ sont strictement positifs ou strictement négatifs ($P(\beta)P(\gamma) > 0$) alors P n'a qu'une racine.
Si $P(\beta)$ ou $P(\beta)$ est nul ($P(\beta)P(\gamma) = 0$), remarque les deux ne peuvent pas être nul en même temps alors P a deux racines.
Si $P(\alpha) > 0$ et $P(\beta) < 0$ alors P a trois racines.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k$$

2. On reprend la formule ci-dessus avec $b = 1$

$$A = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a^2 + a + 1) = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}$$

On reprend la formule du 1. en changeant n en $2n + 1$ et $b = -1$

$$B=a^{2n+1}+1=a^{2n+1}-(-1)^{2n+1}=\big(a-(-1)\big)\sum_{k=0}^{2n}a^{2n-k}(-1)^k=(a+1)\sum_{k=0}^{2n}a^{2n-k}(-1)^k$$
$$=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}-\cdots+a^2-a+1)$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3)=\frac{n(n+1)}{6}(2n-2)=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

2.

a.

$$v_{k+1}-v_k=(k+1)(k+1-1)(k+1-2)-k(k-1)(k-2)$$
$$=(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)=k(k-1)\big(k+1-(k-2)\big)=3k(k-1)$$

b.

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k)=\sum_{k=1}^{n}3k(k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=3S_n=n(n+1)(n-1)$$

c. Donc

$$T_n=n(n+1)(n-1)$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

a.

$$\sum_{1\le k,l\le n}|k-l|=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}|k-l|\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}|k-l|+\sum_{l=k}^{n}|k-l|\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}\big(-(k-l)\big)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}(l-k)\right)$$

b.

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}(l-k)$$

Dans la première somme, on pose $p=k-l$

$$l=1\Rightarrow p=k-1$$
$$l=k-1\Rightarrow p=1$$

Donc

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)=\sum_{p=1}^{k-1}p$$

Autrement dit

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)=(k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+3+2+1=\sum_{p=1}^{k-1}p$$

On fait la somme dans l'autre sens.

Dans la seconde somme, on pose $p = l - k$

$$l = k \Rightarrow p = 0$$
$$l = n \Rightarrow p = n - k$$

Donc

$$\sum_{l=k}^{n} (l - k) = \sum_{p=0}^{n-k} p$$

Alors

$$\sum_{l=1}^{k-1} (k - l) + \sum_{l=k}^{n} (l - k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p$$

c. D'après b.

$$\sum_{l=1}^{k-1} (k - l) + \sum_{l=k}^{n} (l - k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=1}^{n-k} p$$
$$= \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$
$$= \frac{k^2 - k + (n-k)^2 + n - k}{2} = \frac{k^2 - k + n^2 - 2kn + k^2 + n - k}{2}$$
$$= \frac{2k^2 - 2(n+1)k + n^2 + n}{2} = k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2}$$

d. D'après a.

$$\sum_{1 \le k, l \le n} |k - l| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k-1} (k - l) + \sum_{l=k}^{n} (l - k) \right)$$

D'après c.

$$\sum_{1 \le k, l \le n} |k - l| = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - (n+1) \sum_{k=1}^{n} k + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^{n} 1 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} n$$
$$= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{2} + \frac{n}{2}\right) = n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2}\right) = n(n+1)\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= n(n+1)\left(\frac{n}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1.

$$(n+1)n\binom{n-1}{k-2} = (n+1)n\frac{(n-1)!}{(k-2)!\,\big(n-1-(k-2)\big)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(k-2)!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k-2)!\,(n-k+1)!}$$

$$k(k-1)\binom{n+1}{k} = k(k-1)\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = k(k-1)\frac{(n+1)!}{k(k-1)(k-2)!\,(n+1-k)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k-2)!\,(n+1-k)!}$$

Donc ces deux expressions sont égales

2.

$$\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k} = \sum_{k=2}^{n+1}(n+1)n\binom{n-1}{k-2} = (n+1)n\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n-1}{k-2}$$

$$= (n+1)n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{3}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right) = (n+1)n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$$= (n+1)n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

$$\binom{n-k+1}{m+1} = \binom{n-k}{m} + \binom{n-k}{m+1} \quad (1)$$

Pour $k = 0$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} \quad (2)$$

Pour $k = 1$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1}$$

Pour $k = 2$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m+1}$$

Montrons par récurrence que pour $l \in \{0, \dots, n-m-1\}$ que :

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{n-l}{m} + \binom{n-l}{m+1} \quad (3)$$

Pour $l = 0$ c'est l'égalité (2), (pour visualiser les choses on a écrit les formules pour $l = 1$ et $l = 2$).

Utilisons l'égalité (1) avec $k = l + 1$

$$\binom{n-l}{m+1} = \binom{n-l-1}{m} + \binom{n-l-1}{m+1}$$

Ce que l'on remplace dans le dernier terme de (3)

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{n-l}{m} + \binom{n-l-1}{m} + \binom{n-l-1}{m+1} \quad (3)$$

Cela achève la récurrence puis on prend $l = n-m-1 \Leftrightarrow n-l = m+1$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m}$$

Car $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \binom{m}{m}$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!\,\big((n-k)-(p-k)\big)!} = \frac{n!}{k!} \times \frac{1}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

Et

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \times \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{1}{k!\,(p-k)!} \times \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ce qui montre que pour tout $n, p, k \in \mathbb{N}$, $n \geq p \geq k$.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}1^k\times 1^{p-k}=\binom{n}{p}(1+1)^p=2^p\binom{n}{p}$$

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

1. D'après la formule du binôme

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

2.

$$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

$$B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=(-1+1)^n=0$$

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. D'une part

$$(n+1)\binom{n}{k}=(n+1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!}$$

D'autre part

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1}=(k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big(n+1-(k+1)\big)!}=(k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce qui montre l'égalité demandée.

$$(n+1)\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n+1}{k+1}$$

On divise cette égalité par $(n+1)(k+1)$ et on trouve que :

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

On fait le changement d'indice $k'=k+1$

$$k=0\Rightarrow k'=1$$

$$k=n\Rightarrow k'=n+1$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n+1}{k'}=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'}-1\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'}1^{k'}1^{n+1-k'}-1\right)=\frac{1}{n+1}\left((1+1)^{n+1}-1\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

Grace à la formule du binôme.

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

Première méthode :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!}$$

On pose $k' = k-1$, si $k = 1$ alors $k' = 0$ et si $k = n$ alors $k' = n-1$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!\,\big((n-1)-k'\big)!} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,\big((n-1)-k\big)!} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k-1}1^k 1^{n-k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Autre correction sans utiliser les sommes.

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = 1\times\binom{n}{1} + 2\times\binom{n}{2} + 3\times\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n}$$

$$= 1\times\frac{n!}{(n-1)!\,1!} + 2\times\frac{n!}{(n-2)!\,2!} + 3\times\frac{n!}{(n-3)!\,3!} + \cdots + (n-1) + n\frac{n!}{(n-n)!\,n!}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots$$

$$+ n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}$$

$$= n\left[\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}\right]$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right]$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0}1^0 1^{(n-1)-0} + \binom{n-1}{1}1^1 1^{(n-1)-1} + \binom{n-1}{2}1^2 1^{(n-1)-2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{n-2}1^{n-2}1^{(n-1)-(n-2)} + \binom{n-1}{n-1}1^{n-1}1^{(n-1)-(n-1)}\right] = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Deuxième méthode :

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

On dérive ces deux expressions de f

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \Leftrightarrow n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$

On prend alors $x = 1$

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k1^{k-1} \Leftrightarrow n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$