

Exercice 1.

- 1°) a) Quel est le domaine de définition de la fonction argsh ?
b) Cette fonction est-elle dérivable en tout point de ce domaine de définition ? Expliquer sommairement comment cela peut-il être justifié ?
c) Pour un x en lequel argsh est dérivable, rappeler l'expression de $\operatorname{argsh}'(x)$ mentionné en cours.
- 2°) a) Quel est le domaine de définition de la fonction arccos ?
b) Cette fonction est-elle dérivable en tout point de ce domaine de définition ? Expliquer sommairement comment cela peut-il être justifié ?
c) Pour un x en lequel arccos est dérivable, rappeler l'expression de $\operatorname{arccos}'(x)$ mentionné en cours.

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arcsin(\operatorname{th}(x)) - \arctan(\operatorname{sh}(x))$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f , puis montrer que f est dérivable sur cet ensemble de définition.
2) Pour tout $x \in D_f$, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x .
3) Que dire de f .

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Dans cet exercice, les informations suivantes pourront être utiles :

$$\frac{1}{48} = 0,02083333 \dots,$$

$$9 \times 4^5 = 9216$$

$$9 \times 5^5 = 28125$$

- 1) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n + 1$ l'ordre du reste dans la formule.
2) Écrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f: t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$, entre 64 et 65 et avec un reste à l'ordre 2.
3) En déduire un nombre décimal qui approche $\sqrt[3]{65}$ avec une précision inférieure à 10^{-4} près.
4) (Un peu délicate). Sauriez-vous déduire de la question 2 la valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de $\sqrt[3]{65}$?

Allez à : [Correction exercice 3](#)

CORRECTION

Correction exercice 1.

- 1) a) L'ensemble de définition de argsh est \mathbb{R} .
b) argsh est la bijection réciproque de $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, laquelle est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et dont la dérivée ne s'annule pas donc argsh est dérivable sur \mathbb{R} .
c) $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- 2) a) arccos est définie sur $[-1,1]$.
b) \arcsin est la bijection réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1,1]$, laquelle est une fonction dérivable sur $[0, \pi]$ mais dont la dérivée est nulle en 0 et en π , comme $\operatorname{arccos}(-1) = \pi$ et $\operatorname{arccos}(1) = 0$, arccos est dérivable sur $] - 1,1[$.
c) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

1) $\text{th}: \mathbb{R} \rightarrow]-1,1[$ est dérivable, $\arcsin: [-1,1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est dérivable sur $] -1,1[$ donc $\arcsin(\text{th})$ est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} . \arctan et sh sont des fonctions définies, continues et dérivables sur \mathbb{R} donc la composée est aussi définie et dérivable sur \mathbb{R} . Finalement f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} .

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\text{th}^2(x)}} - \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} - \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} |\text{ch}(x)| - \frac{1}{\text{ch}(x)} \\ &= \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \times \text{ch}(x) - \frac{1}{\text{ch}(x)} = 0 \end{aligned}$$

Car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > 0$ donc $|\text{ch}(x)| = \text{ch}(x)$

3) Sur l'intervalle \mathbb{R} :

$$f(x) = K$$

Or $f(0) = \arcsin(\text{th}(0)) - \arctan(\text{sh}(0)) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$ donc $f(x) = 0$.

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1) Si f est C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2)

f est C^1 sur $[64,65]$ et deux fois dérivable sur $]64,65[$.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^{\frac{1}{3}} & f(64) &= 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4 \\ f'(t) &= \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} & f'(64) &= \frac{1}{3} \times (4^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times 4^{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{48} \\ f''(t) &= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)t^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Il existe $c \in]64,65[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(65) &= f(64) + (65-64)f'(64) + \frac{(65-64)^2}{2}f''(c) \\ 65^{\frac{1}{3}} &= 4 + 1 \times \frac{1}{48} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{9}\right)c^{-\frac{5}{3}} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

3)

$$65^{\frac{1}{3}} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < 4 + \frac{1}{48} < 4 + 0,02084 = 4,02084$$

D'autre part

$$64 < c \Rightarrow 64^{-\frac{5}{3}} > c^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow c^{-\frac{5}{3}} < (4^3)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < \frac{1}{9} \times 4^{-5} = \frac{1}{9 \times 4^5} = \frac{1}{9216} < \frac{1}{8000} = 1,25 \times 10^{-4}$$

Donc

$$\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < 1,25 \times 10^{-4} \Rightarrow -0,000125 < -\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}$$

On en déduit que :

$$4 + \frac{1}{48} - 0,000125 < 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}$$

Or

$$0,02083 < \frac{1}{48}$$

Donc

$$4 + 0,02083 - 0,000125 < 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow 4,020705 < \sqrt[3]{65}$$

Finalement

$$4,020705 < \sqrt[3]{65} < 4,02084$$

Ce qui assure que 4,0208 est une valeur approchée de $\sqrt[3]{65}$ à 10^{-4} près.

4)

$$0,020833 < \frac{1}{48} < 0,020834 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 64 < c < 65 < 125 &\Rightarrow 64^{-\frac{5}{3}} > c^{-\frac{5}{3}} > (125)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow (5^3)^{-\frac{5}{3}} < c^{-\frac{5}{3}} < (4^3)^{-\frac{5}{3}} \\ &\Rightarrow 5^{-5} < c^{-\frac{5}{3}} < 4^{-5} \Rightarrow \frac{1}{9 \times 5^5} < \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < \frac{1}{9 \times 4^5} \Rightarrow \frac{1}{28125} < \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < \frac{1}{9216} \\ &\Rightarrow \frac{1}{30000} < \frac{1}{28125} < \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < \frac{1}{9216} < \frac{1}{8000} \Rightarrow 4 \times 10^{-5} < \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < 1,25 \times 10^{-4} \\ &\Rightarrow -0,000125 < -\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < -0,000033 \dots \quad (2) \end{aligned}$$

En additionnant (1) et (2) :

$$\begin{aligned} 0,020833 - 0,000125 &< \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < 0,020833 \dots - 0,000033 \dots = 0,0208 \\ &\Rightarrow 0,020705 < \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < 0,0208 \Rightarrow 4,020705 < 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}} < 4,0208 \\ &\Rightarrow 4,020705 < \sqrt[3]{65} < 4,0208 \end{aligned}$$

Une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de $\sqrt[3]{65}$ est 4,0207

Allez à : **Exercice 3**