Voici un corrigé de l'exercice 9 de la feuille 2.

Exercice 9.

Soit $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $x \in \boldsymbol{R}^*$, $xf(x) < 0$.
Soit $y_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. *Montrer que le problème (1) admet une unique solution maximale $y : J \to \boldsymbol{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.*

   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (1) admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.

   Ici, l'équation différentielle étudiée est autonome, le champ de vecteurs peut aussi être écrit $\tilde{f} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(t, x) \mapsto f(x)$, et on a bien $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

2. *Montrer que la fonction $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J.*

   On note $\varphi : J \to \mathbf{R}, t \mapsto (y(t))^2$. Alors φ est dérivable sur J.

   Comme pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $xf(x) < 0$, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xf(x) \leq 0$. Pour tout $t \in J$,

   $$\varphi'(t) = 2y(t)y'(t) = 2y(t)f(y(t)) \leq 0$$

   donc φ est décroissante sur J.

3. *En déduire que l'intervalle J contient $[0, +\infty[$ et qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)^2 = \ell$.*

   Comme $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J, pour tout $t \in J$ tel que $t \geq 0$, on a $y(t)^2 \leq y(0)^2 = y_0^2$. Ainsi y est bornée sur $J \cap [0, +\infty[$ et par le théorème d'explosion en temps fini, y est définie jusqu'en $+\infty$.

4. *On veut montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$.*

   (a) *Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) > 0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.*

   Comme $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J, pour tout $t \geq 0$, on a $y(t)^2 \geq \ell > 0$ donc y ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$. Comme y est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc de signe constant sur l'intervalle $[0, +\infty[$, du signe de $y(0) = y_0$ qui est strictement positif. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $y(t) = \sqrt{y(t)^2}$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.

   (b) *En déduire que $y'(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ puis que $f(\sqrt{\ell}) = 0$.*

   Pour tout $t \geq 0$, $y'(t) = f(y(t))$ et f est continue sur $\mathbf{R}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = f(\sqrt{\ell})$.

   Ainsi, y est de classe $\mathcal{C}^1$, bornée sur $[0, +\infty[$ et y' a une limite en $+\infty$. On en déduit (résultat vu lors de la correction de l'exercice 7) que $y'(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Ainsi $f(\sqrt{\ell}) = 0$.

   (c) *Conclure.*

   Comme pour tout $x \neq 0$, $xf(x) < 0$, on a $f(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. On a donc $\sqrt{\ell} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

5. *On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, $xf(x) \leq -\alpha x^2$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$.*

   Pour tout $t \geq 0$,

   $$\varphi'(t) = 2y(t)y'(t) = 2y(t)f(y(t)) \leq -2\alpha y(t)^2 = -2\varphi(t).$$

On peut utiliser le lemme de Gronwall, ou dans ce cas très simple, refaire la preuve. En effet, en notant $\psi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ t \mapsto e^{2\alpha t}\varphi(t)$, on a ψ dérivable et pour tout $t \geq 0$,

$$\psi'(t) = e^{2\alpha t}(\varphi'(t) + 2\alpha\varphi(t)) \leq 0.$$

Ainsi, ψ est décroissante.

Soit $t \geq 0$, on a $\psi(t) \leq \psi(0)$, c'est-à-dire $y(t)^2 \leq y_0^2 e^{-2\alpha t}$ et donc $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$ (rappelons qu'on a établi précédemment que y est à valeurs strictement positives).