Correction détaillée des exercices 1,2, 3 et 4 de la Fiche 4

Nous noterons $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.
Question 1. Rappelons que les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines du polynôme caractéristique de A, $P_A(X) = det(A - X \cdot I_n)$ où I_n est la matrice identité.

Valeurs propres de A. On a

$$P_A(X) = det(A - X \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = X^2.$$

Comme $X^2 = 0$ si et seuelement si $X = 0$; A admet une unique valeur propre $\lambda = 0$ (de multiplicité algébrique 2).

Valeurs propres de B. On a

$$P_B(X) = det(B - X \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2.$$

De même ici, B admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ (de multiplicité algébrique 2).

Valeurs propres de C. On a

$$P_C(X) = det(C - X \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 0 & 4-X & 5 \\ 0 & 0 & 6-X \end{vmatrix} = (1-X)(4-X)(6-X).$$

Donc C admet trois valeurs propres distinctes $1, 4$ et 6, chacune de multiplicité algébrique 1.

Question 2.

Diagonalisabilité de A. Suposons que A soit diagonaisable. Comme 0 est l'unique valeur propre de A de multiplicité algébrique 2, on aurait

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc D est la matrice nulle. Ce qui est impossible car pour n'importe quelle matrice P

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui impliquerait que A est la matrice nulle.

Diagonalisabilité de B. Suposons que B soit diagonaisable. Comme 1 est l'unique valeur propre de A de multiplicité algébrique 2, on aurait

$$B = P \cdot D \cdot P^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc D est la matrice identité. De même ici, pour n'importe quelle matrice P

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui impliquerait que B est la matrice identité ; contradiction.

Diagonalisabilité de C. Comme C est une matrice de type $(3,3)$ et qu'elle admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Exercice 2. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Question 1. Calculons le polynôme caractéristique de A. On a

$$P_A(X) = det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 2 \\ 0 & 1-X & 4 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(3-X).$$

Question 2. Comme $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = 3$, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. On remarque en particulier que λ_1 est de multipicité algébrique 2 et λ_2 est de multiplicité algébrique 1.

Question 3. Bases des sous-espaces propres $E_1(A)$ et $E_3(A)$. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\vec{u} \in E_1(A) \text{ ssi } (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ssi } z = 0.$$

D'où $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ constitue une famille génératrice de $E_1(A)$ et comme elle est libre, elle constitue une base. Donc la dimension de $E_1(A)$ est 2.

En ce qui concerne $E_3(A)$, on a

$$\vec{u} \in E_3(A) \text{ ssi } (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ssi } x = z \text{ et } y = 2z.$$

Donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est générateur de $E_1(A)$. Comme $(\vec{v})$ est libre, $(\vec{v})$ constitue une base de $E_3(A)$. La dimension de $E_3(A)$ est 1.

Question 3. Comme P_A est scindé et comme la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité géométrique, A est diagonalisable (voir Rappels et remarques en bas).

Question 4. On prend $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v})$, donc la réunion des deux bases trouvées des sous-espaces propres. Elle est formée de vecteurs propres de A. On prend $P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et on a donc

$$A = P.D.P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.
Question 1. La matrice de f est la matrice dont les colonnes sont les composantes des $f(\overrightarrow{e_i})$ dans la base $\mathscr{E}$:

$$M_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 2. Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique de f. On rappelle que le polynôme caractéristique de f est défini de la façon suivante :

$$P_f(X) = det(M_{\mathscr{E}}(f) - XI_3).$$

Rappel. *Il s'agit d'un polynôme de degré égal à la taille de la matrice A, ici 3. On rappelle également que la définition de $P_f(X)$ ne dépend pas de la base de la matrice associée à f choisie. Ici, on considère la matrice A associée à f dans la base canonique mais si l'on considère une autre base notée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$, on aura également :*

$$P_f(X) = det(M_{\mathscr{B}}(f) - XI_3)$$

car on peut montrer que :

$$det(M_{\mathscr{E}}(f) - XI_3) = det(M_{\mathscr{B}}(f) - XI_3).$$

□

On a

$$\begin{aligned} det(M_{\mathscr{E}}(f) - XI_3) &= det(\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \\ &= det(\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}) \\ &= det(\begin{pmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= (3-X)(2-X)(1-X). \end{aligned}$$

On résout $P_f(X) = 0$ et on trouve de suite

$$P_f(X) = 0 \Leftrightarrow (3-X)(2-X)(1-X) = 0 \Leftrightarrow X \in \{1, 2, 3\}.$$

Donc les valeurs propres de f sont 1,2 et 3. On notera $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Question 3. L'endomorphisme f est diagonalisable puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 et f a trois valeurs propres distinctes. On cherche à présent une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ formée de vecteurs propres de f.

On commence par chercher les vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1, 2 et 3.

Calculons

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1}(f) &= E_1(f) \\ &= Ker(f - Id). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(f) &\Leftrightarrow (f - Id)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (A - I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a 3 inconnues et seulement 2 équations : on passe z en paramètre :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ y = 0 \end{cases}$$

On trouve ensuite x et y en foncton de z "en remontant" et en remplaçant y par sa valeur :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ engendre $E_{\lambda_1}(f)$. De plus, cette famille étant composée d'un unique vecteur non nul, elle est libre et donc constitue une base de $E_{\lambda_1}(f)$ qui est de dimension 1.
On fait de même pour déterminer une base de $E_{\lambda_2}(f)$ et $E_{\lambda_3}(f)$ et on trouve respectivement les familles

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

et

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

On utilise des propositions du cours (voir plus bas Rappels & remarques) pour conclure que : $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Elle est composée de vecteurs propres de f (associés aux valeurs propres 1, 2 et 3 respectivement) donc il s'agit d'une base de diagonalisation de f que l'on note $\mathscr{B}$ et on a

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En notant $D = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$, on a alors d'après la formule du cours

$$D = P^{-1}.A.P$$

ou de façon équivalente

$$A = P.D.P^{-1}$$

Exercice 4.

Question 1.

Étape 1. Calcul du poynôme caractéristique $P_A(X) = det(A - XI_2)$ et le calcul donne

$$P_A(X) = (4 - X)(-2 - X).$$

Le polynôme caractéristique est scindé donc on passe à :
Étape 2. Recherche des racines de $P_A(X)$

$$P_A(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \{-2, 4\}$$

Donc $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 4$ sont les valeurs propres de A. Commme pour l'exercice précédent, on a une matrice de taille 2 et on a 2 valeurs propres distinctes, donc d'après le cours A est diagonalisable. Faisons quand même la méthode générale, que l'on aurait appliquée si on n'avait trouvé qu'une seule valeur propre : on n'aurait alors pas utiliser la remarque 0.0.3 pour conclure directement et on aurait dû comparer les multiplicités algébrique et géométrique de la valeur propre trouvée.
Étape 3. (ici inutile mais on s'entraîne) : les multiplicités algébrique et géométrique des valeurs propres de λ_1 et λ_2.
Pour λ_1 :
La multiplicité algébrique de λ_1, noté m_1 est la puissance du facteur $(X - \lambda_1)$ qui apparaît dans le polynôme caractéristique, donc $m_1 = 1$.
La multiplicité géométrique de λ_1 est la dimension de $E_{\lambda_1}(A)$: il faut donc par exemple trouver une base de $E_{\lambda_1}(A)$ pour le trouver. C'est ce que l'on fait exactement comme à la question 3 de l'exercice 3 et on trouve que $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $E_{\lambda_1}(A)$. Donc $dim(E_{\lambda_1}(A)) = 1 = m_1$.

Pour λ_2 :
La multiplicité algébrique de λ_2, noté m_2 est la puissance du facteur $(X - \lambda_2)$ qui apparaît dans le polynôme caractéristique, donc $m_2 = 1$.
La multiplicité géométrique de λ_1 est la dimension de $E_{\lambda_2}(A)$: il faut donc par exemple trouver une base de $E_{\lambda_2}(A)$ pour le trouver. C'est ce que l'on fait exactement comme à la question 3 de l'exercice 3 et on trouve que $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $E_{\lambda_1}(A)$. Donc $dim(E_{\lambda_2}(A)) = 1 = m_2$.

Donc f est diagonalisable.

Étape 4. Utilisation des Propositions 0.0.1 et 0.0.2 (Voir plus bas) pour trouver une base de diagonalisation de f.
D'après ces propositions, $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une base formée de vecteurs propres de f. Comme elle est constituée de vecteurs propres de f, c'est une base de diagonalisation de f, notée $\mathscr{B}$ et on a

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc en notant $D = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ on a

$$D = P^{-1}.A.P$$

ou

$$A = P.D.P^{-1}.$$

Question 2. On a

$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$

On fait le calcul, en sachant que

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Question 3. On a, en écrivant le système matriciellement

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n.\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0. \end{pmatrix} \tag{1}$$

On calcule $A^n.\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ à l'aide de la valeur de A^n trouvée à la question 2. D'après l'égalité (1), on trouve un vecteur colonne dont le premier coefficient est égal à u_n et le second à v_n, ce qui nous donne la réponse à la question 3.

RAPPELS & REMARQUES

Rappelons ce que signifie que $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de diagonalisation de f (base formée de vecteurs propres de f). Cela signifie que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale, donc de la forme

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Par définition, cela signifie que l'on a pour tout i entre 1 et 3

$$f(\vec{u_i}) = \mu_i.\,\vec{u_i}$$

Donc cela signifie que les u_i sont des vecteurs propres de f, et que les μ_i de la diagonale de la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ sont des valeurs propres, et sont associées respectivement aux vecteurs propres $\vec{u_i}$. Donc dire que $\mathscr{B} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ est une base de diagonalisation de f revient à dire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de f. Et la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ associée à f dans cette base sera la matrice ayant μ_1, μ_2 et μ_3 sur la diagonale.

Jusque là, on a parlé de diagonalisation d'une application linéaire f. On rappelle la définition : f est diagonalisable s'il existe une base de diagonalisation de f, c'est-à-dire une base vérifiant ce que l'on a dit dans la remarque précédente.

Mais on peut également parler de diagonalisation d'une matrice A. On rappelle la définition : A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}.A.P$$

Voyons le lien entre la diagonalisation d'une application linéaire et d'une matrice. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par exemple et notons $A = M_{\mathscr{E}}(f)$ la matrice associée à f dans la base canonique. Dire que

f est diagonalisable revient à dire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de diagonalisation, c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathscr{B}}(f)$ soit une matrice diagonale. Or, nous connaissons maintenant la formule suivante

$$M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}^{-1}.M_{\mathscr{E}}(f).P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$$

Donc on a l'existence d'une matrice diagonale D ($D = M_{\mathscr{B}}(f)$) et d'une matrice inversible P ($P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$) telles que, en notant $A = M_{\mathscr{E}}(f)$, on ait

$$D = P^{-1}.A.P$$

On vient donc de montrer que si un endomorphisme f est diagonalisable, alors la matrice $M_{\mathscr{E}}(f)$ est une matrice diagonalisable et de même on montre que cela est vrai pour n'importe quelle base $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{R}^3$: si un endomorphisme f est diagonalisable, alors la matrice $M_{\mathscr{E}'}(f)$ est diagonalisable.
Réciproquement, soit A une matrice diagonalisable de $M_3(\mathbb{R})$. Par définition cela signifie qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}.A.P$$

Considérons l'endomorphisme, noté f, associé à A dans la base canonique, c'est-à-dire l'endomorphisme défini par :

$$f(x, y, z) = A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou de façon équivalente, défini par (entre guillemets) :

$$M_{\mathscr{E}}(f(\overrightarrow{e_i})) = \textit{ième colonne de } A$$

on a alors par définition :

$$A = M_{\mathscr{E}}(f)$$

Notons par ailleurs $\overrightarrow{u_i}$ les vecteurs dont les composantes dans la base canonique sont respectivement la ième colonne de P. On voit que par définition, on a :

$$P = M_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$$

De plus, comme P est inversible, d'après le cours $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}$. On a alors par définition :

$$P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}.A.P \\ &= P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}^{-1}.M_{\mathscr{E}}(f).P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Donc d'après la formule des matrices de passage

$$D = M_{\mathscr{B}}(f)$$

Donc $M_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale, donc $\mathscr{B}$ est une base de diagonalisation de f et donc f est diagonalisable.
On vient de montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme f associé à A dans la base canonique est diagonalisable. De même, on montre que cela est vrai pour toute base $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{R}^3$: si A est une matrice diagonalisable, alors l'endomorphisme g associé à A dans la base $\mathscr{E}'$ est diagonalisable.

Remarque 0.0.1
On rappelle que l'ensemble constitué du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 de f par exemple est appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_1 et est défini de la façon suivante :

$$E_{\lambda_1}(f) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\overrightarrow{v}) = \lambda_1.\, \overrightarrow{v}\}$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ce que je vous encourage vivement à vérifier par vous-mêmes afin de vous en convaincre définitivement.
On a :

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1}(f) &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{v}) = \lambda_1.\ \vec{v}\} \\ &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{v}) - \lambda_1.\ \vec{v} = \vec{0}\} \\ &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | (f - \lambda_1.Id)(\vec{v}) = \vec{0}\} \\ &= Ker(f - \lambda_1.Id) \end{aligned}$$

où Id est l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.
Comme on sait que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel, et comme l'application $(f - \lambda_1.Id)$ est linéaire (somme d'applications linéaires), la dernière ligne montre notamment que les sous-espaces propres sont des espaces vectoriels.

Remarque 0.0.2
On rappelle le critère pour montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est diagonalisable : f est diagonalisable si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *$P_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.*
   On a alors $P_f(X)$ de la forme :

$$P_f(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \ldots \times (X - \lambda_p)^{m_p}$$

   où les λ_i sont les valeurs propres de f et les m_i leurs multiplicités algébriques respectifs. On rappelle que l'on a toujours :

$$m_1 + \ldots + m_p = n$$

2. *Pour TOUT i entre 1 et p la multiplicité algébrique de λ_i (m_i) et la multiplicité géométrique de λ_i (c'est-à-dire $dim(E_{\lambda_i}(f))$) sont égaux.*

Remarque 0.0.3
On a "un raccourci" dans le cas où l'on trouve exactement autant de valeurs propres distinctes que le degré n de E : un résultat du cours nous dit la chose suivante :
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors f est diagonalisable.

On rappelle des propositions du cours :

Proposition 0.0.1
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f. On a :

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow E \text{ est somme directe des sous-espaces propres } E_{\lambda_i}(f)$$

où on rappelle que E est somme directe des $E_{\lambda_i}(f)$ si :

1. $E = E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$
2. Pour tous $\vec{u_i} \in E_{\lambda_i}(f)$ tels que :

$$\vec{u_1} + \cdots + \vec{u_p} = \vec{0}$$

   on a

$$\vec{u_1} = \cdots = \vec{u_p} = \vec{0}$$

Proposition 0.0.2
Si pour tout i, on note $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$, on a
E est somme directe des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(f)$ si et seulement si $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E