Correction de l'exercice 3 du TD 6

Rappels

Définition 0.0.1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Une forme quadratique sur E est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (appelée "forme" parce qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$) telle qu'il existe une application bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\vec{u} \in E$, on ait :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = q(\vec{u})$$

Proposition 0.0.1
Si une telle application bilinéaire symétrique φ existe, alors elle est unique. Elle est alors notée φ_q et est définie par :

$$\varphi_q(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}(q(\vec{u} + \vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v}))$$

Remarque 0.0.1
En pratique, si l'on nous donne par exemple une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie, dans la base canonique, par :

$$q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_1x_2$$

et si l'on nous demande de trouver l'expression de $\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2))$, utiliser la proposition 0.0.1 demande trop de calculs et on procède plutôt comme suit :
on remplace les x_i^2 de q par : x_iy_i
on remplace les x_ix_j avec $i \neq j$ par : $\frac{1}{2}(x_iy_j + x_jy_i)$
et on trouve :

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - \frac{5}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Remarque 0.0.2
Etant donné une base $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ de $\mathbb{R}^2$ par exemple, on peut associer à la forme quadratique q une matrice notée $M_{\mathscr{B}}(q)$ ou $M_{\mathscr{B}}(\varphi_q)$ définie par :

$$M_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_q(\vec{u_1}, \vec{u_1}) & \varphi_q(\vec{u_1}, \vec{u_2}) \\ \varphi_q(\vec{u_2}, \vec{u_1}) & \varphi_q(\vec{u_2}, \vec{u_2}) \end{pmatrix}$$

Comme φ_q est symétrique, on voit que la matrice $M_{\mathscr{B}}(q)$ est une matrice symétrique (puisque $\varphi_q(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = \varphi_q(\vec{u_2}, \vec{u_1})$). Dans notre exemple, q nous est donnée par rapport à la base canonique et on peut donc construire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$M_{can}(q) = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

De façon générale, sur E de dimension n, si $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ est une base de E, on définit :

$$M_{\mathscr{B}}(q) = (\varphi_q(\vec{u_i}, \vec{u_j}))_{i,j}$$

Remarque 0.0.3 (Formules importantes)
En notant toujours $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ une base de E et en notant :

$$\vec{u} = \sum_{i=0}^{n} x_i\, \vec{u_i} \quad et \quad \vec{v} = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \vec{u_i}$$

deux vecteurs de E exprimés dans cette base, et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

les vecteurs de leurs composantes dans cette base, on a :

$$\varphi_q(\vec{u}, \vec{v}) = {}^tX.M_{\mathscr{B}}(q).Y \tag{2}$$

ou encore :

$$\varphi_q(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_j}) x_i y_j \tag{3}$$

De plus, en prenant $\vec{u}=\vec{v}$*, on a :*

$$\begin{aligned} q(\vec{u}) &= \varphi_q(\vec{u},\vec{u}) \\ &= \sum_{i,j}^{n} \varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_j}) x_i x_j \qquad (4) \\ &= \sum_{i}^{n} \varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_i}) x_i^2 + 2\sum_{i<j} \varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_j}) x_i x_j \qquad (5) \end{aligned}$$

*Ceci est appelée l'**écriture analytique** de q.*

***En pratique**, si l'on veut construire* $M_{\mathscr{B}}(q)$ *sans faire les calculs de tous les* $\varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_j})$*, on a les deux options suivantes :*

***Option 1** : si pour tous vecteurs* $\vec{u},\vec{v}$ *de E, on connait l'écriture de* $\varphi_q(\vec{u},\vec{v})$ *en fonction des coordonnées de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *: c'est-à-dire que l'on nous donne, en notant :*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

les vecteurs des composantes de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *dans cette base :*

$$\varphi_q(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$$

où les $a_{i,j}$ *sont des réels.*
Dans ce cas, d'après la formule (3), on a :

$$a_{i,j} = \varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_j})$$

Donc on construit tout simplement $M_{\mathscr{B}}(q)$ *en mettant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (et, par symétrie, à l'intersection de la ligne j et de la colonne i) le nombre* $a_{i,j}$*.*

En reprenant l'exemple vu dans la remarque 0.0.1 de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ *définie, dans la base canonique notée* $(\vec{e_1},\vec{e_2})$*, par :*

$$q(x_1,x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_1x_2$$

on avait en faisant les opérations de la remarque 0.0.1 :

$$\varphi_q((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - \frac{5}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

D'où la matrice trouvée en (1).

***Option 2** : si on connait l'**écriture analytique** de q dans la base* $\mathscr{B}$ *de E, c'est-à-dire qu'on nous donne une écriture de la forme :*

$$q(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{i,j} x_i x_j$$

Dans ce cas, d'après la formule (3), on a :

$$a_{i,j} = \varphi_q(\vec{u_i},\vec{u_j})$$

Donc on construit tout simplement $M_{\mathscr{B}}(q)$ *en mettant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (et, par symétrie, à l'intersection de la ligne j et de la colonne i) le nombre* $a_{i,j}$*.*

Il faut faire ***TRES ATTENTION*** *à ne pas se tromper avec le facteur 2 : si l'on reprend l'exemple vu dans la remarque 0.0.1 de la forme quadratique sur* $\mathbb{R}^2$ *définie, dans la base canonique, par :*

$$q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_1x_2$$

ceci ***N'EST PAS*** *sa forme analytique qui est plutôt :*

$$q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2 \times (-\frac{5}{2}x_1x_2)$$

D'où la matrice $M_{can}(q)$ *trouvée en* (1).
On peut bien sûr trouver cette matrice en calculant explicitement les $\varphi_q(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$ *à partir de la définition de q, sans utiliser la formule* (5)*. Une fois qu'on est habitués, cette formule est utile pour éviter ces calculs mais il faut encore une fois faire attention à bien avoir factorisé* ***toute la partie*** *avec les* x_ix_j *où* $i \neq j$ *par +2.*

Autre exemple, pour être bien au clair : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$*, on considère la forme quadratique définie par :*

$$q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 7x_3^2 - 6x_1x_2 + 9x_1x_3$$

Son écriture analytique est :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 7x_3^2 + 2 \times (-3x_1x_2 + \frac{9}{2}x_1x_3)$$

Donc sa matrice dans la base canonique est :

$$M_{can}(q) = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 9/2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 9/2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Définition 0.0.2
On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *de E sont orthogonaux par rapport à* φ_q*, ou q-orthogonaux si on a :*

$$\varphi_q(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0.$$

On dit qu'une famille $\{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\}$ *de vecteurs de E est orthogonale par rapport à* φ_q*, ou q-orthogonale si pour tous* $i \neq j$ *on a :*

$$\varphi_q(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j}) = 0.$$

Remarque 0.0.4
Dire qu'une base $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ *de E est orthogonale par rapport à* φ_q *revient à dire que* $M_{\mathscr{B}}(q)$ *est diagonale puisque cela revient à dire que* $\varphi_q(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j}) = 0$ *dès que* $i \neq j$*. D'après la formule* (4)*, on voit que cela revient à n'avoir que des carrés dans la formule donnant q dans la base* $\mathscr{B}$*, à savoir, si* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *:*

$$q(\overrightarrow{u}) = \sum_{i}^{n} \varphi_q(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_i})x_i^2$$

ou encore :

$$q(\overrightarrow{u}) = \sum_{i}^{n} q(\overrightarrow{u_i})x_i^2 \tag{6}$$

Ainsi, avoir une base orthogonale pour φ_q *simplifie l'écriture analytique de q en ne laissant que des carrés.*

Proposition 0.0.2 (formule de changement de base pour les formes quadratiques)
Si $\mathscr{C}$ *est une autre base de E, on a :*

$$M_{\mathscr{C}}(q) = {}^t P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.M_{\mathscr{B}}(q).P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$$

Ainsi, il s'agit du même type de formule que celle du changement de base pour une matrice associée à une forme linéaire, avec l'opération de transposition qui remplace l'inversion.

Remarque 0.0.5
Prenons $E = \mathbb{R}^n$.
*Ces deux notions de changement de base se rejoignent lorsque les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont orthonormées **au sens du produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$: dans ce cas en effet la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est une matrice orthogonale, c'est-à-dire que sa transposée est égale à son inverse.*
Dans ce cas, si l'on note $A = M_{\mathscr{B}}(q)$ et f l'application linéaire associée à A dans la base $\mathscr{B}$ (on a alors $A = M_{\mathscr{B}}(f)$), on a :

$$M_{\mathscr{C}}(f) = P^{-1}.A.P = ^t P.A.P = M_{\mathscr{C}}(q)$$

Remarque 0.0.6 (En pratique)
Le but lorsqu'il s'agit d'une forme quadratique q est de trouver une base $\mathscr{B}$ orthogonale par rapport φ_q afin de simplifier l'écriture analytique de q en n'ayant que des carrés, comme en (6). *On peut vouloir deux choses :*

***Cas 1** : Si l'on veut simplement que $\mathscr{B}$ soit orthogonale pour φ_q, on applique la méthode de Gauss (voir le cours) pour obtenir une expression de q avec que des carrés du type* (6). *Un changement de variables nous permet ensuite d'obtenir une base orthogonale comme souhaité (voir correction de l'exercice 3 ci-dessous).*

***Cas 2** : Si l'on veut de plus que cette base soit également orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, on diagonalise la matrice $M_{can}(q)$ et on passe par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ce qui nous donnera d'après la remarque 0.0.5 une base à la fois orthonormée pour le produit scalaire canonique (ce qui est le but de Gram-Schmidt appliqué au produit scalaire canonique) et orthogonale par rapport à φ_q.*

Correction de l'exercice 3 du TD6

Question 1

On définit :

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

où (x_1, x_2) sont des coordonnées de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique. (Remarquez que j'ai préféré distinguer les coordonnées en leur donnant un numéro (1 et 2) plutôt que de les appeler x et y comme dans l'énoncé, ce qui est à mon sens plus pratique dans le cadre des formes quadratiques où c'est la position des coordonnées dans la matrice colonne des composantes d'un vecteur qui importe plus que leur nom. Si vous préférez également cette notation, écrivez-la clairement dès le début de l'exercice comme je viens de le faire et récrivez-la à chaque fois qu'elle apparaît dans une question de l'énoncé pour ne pas vous embrouiller avec la notation "(x,y)" qui est utilisée. Si vous arrivez à vous adapter à la notation de l'énoncé sans vous embrouiller, c'est très bien aussi et vous pouvez dans ce cas conserver les notations de l'énoncé).
La conique est alors l'ensemble des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{can}}$ tels que :

$$q(\vec{u}) = 1.$$

Ce que l'on nous demande dans l'exercice fait partie du deuxième cas de la remarque 0.0.6, puisqu'on veut une base à la fois orthogonale par rapport à φ_q (puisque l'on voit que l'expression donnée ne contient plus que des carrés) et orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. On va donc diagonaliser la matrice $A = M_{can}(q)$ en tant que matrice associée à une application linéaire notée f, par rapport à la base canonique. On sait que A est diagonalisable dans une base orthonormée (par rapport au produit scalaire canonique) puisqu'elle est symétrique.

Tout d'abord, on calcule A grâce à l'écriture analytique de q qui est précisément :

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2(\frac{1}{2}x_1x_2)$$

et qui, d'après l'option 2 de la remarque 0.0.3, nous donne directement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le polynôme caractéristique de A et on trouve :

$$P_A(X) = (X - 1/2)(X - 3/2)$$

Donc les valeurs propres de A sont 1/2 et 3/2.

En étudiant les sous-espaces propres associés, on trouve que $\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\}$ est une base de $E_{1/2}(A)$ et que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est une base de $E_{3/2}(A)$. D'après le cours $(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$ est une base de diagonalisation de A. Pour avoir une base de diagonalisation orthonormée, on orthonormalise **chaque sous-espace propre individuellement** avec le procédé de Gram-Schmidt de façon à **trouver séparément une base orthonormée de chaque sous-espace propre**. D'après le cours, la réunion de toutes ces bases orthonormées sera une base de diagonalisation orthonormée de A. Ici, il suffit de normaliser chaque vecteur : $\{\vec{u_1} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\}$ est une base orthonormée de $E_{1/2}(A)$; $\{\vec{u_2} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ est une base orthonormée de $E_{3/2}(A)$ et d'après le cours, $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ qui se trouve être par construction une base orthonormée de diagonalisation (car formée de vecteurs propres) de A , c'est-à-dire que la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale et égale à :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 3/2\end{pmatrix}$$

Comme la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}$ sont des bases orthonormées par rapport au produit scalaire canonique, d'après la remarque 0.0.5, on a aussi :

$$M_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 3/2\end{pmatrix}$$

donc $\mathscr{B}$ est également orthogonale pour φ_q d'après la remarque 0.0.4. De plus, d'après (4) de la remarque 0.0.3, on a : en notant (x'_1, x'_2) les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$q(\vec{u}) = \frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{3}{2}x_2'^2$$

Donc la conique est aussi l'ensemble des vecteurs $u = \begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ tels que :

$$\frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{3}{2}x_2'^2 = 1$$

Question 2

Pour cette question, il suffit de connaître le cours par coeur : ici on utilise précisément la diapo 61 pour conclure que :

1. La conique est une ellipse avec $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2/3}$.
   On pose : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2/\sqrt{3}$
   Dans le repère orthonormé formé par les vecteurs $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$:
2. Le foyer a pour composantes dans la base $\mathscr{B}$:
$$F = \begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$
3. L'excentricité est : $e = c/a = \sqrt{2/3}$
4. La droite directrice a pour équation dans le repère (O, u_1, u_2) :
$$x' = a^2/c = \sqrt{3}$$
5. Les composantes des sommets dans la base $\mathscr{B}$ sont :
$$S_1 = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$
   et
$$S_2 = \begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$