Petit manuel de bonne rédaction

« Bien rédiger » peut signifier deux choses :

1) exposer sa pensée clairement, c'est-à-dire avec ordre et rigueur — et si possible avec style ;
Un raisonnement faux peut être bien rédigé, et il est dans ce cas souvent facile de trouver l'erreur commise. Au contraire, un raisonnement « correct » mal rédigé est souvent signe d'arnaque, volontaire ou non.

2) se conformer aux conventions de notation pratiquées par la communauté des personnes auxquelles on s'adresse.
Par exemple, puisque tout le monde note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, il faudrait avoir l'esprit tordu pour le noter autrement. On peut toujours contester la notation $\mathbb{R}$ et insister sur son caractère arbitraire, il n'en demeure pas moins qu'il est nécessaire de fixer une notation si l'on veut pouvoir communiquer.

Dans tout ce texte, les exemples de rédactions correctes sont précédées des symboles ✌ ✌ ✌ et les exemples de rédaction incorrectes des symboles ✖✖✖.

Je vais employer ci-dessous un ton impératif et sûr de lui, mais sachez tout de même que les conventions de la bonne rédaction ne sont pas gravées dans le marbre dans les moindres détails. Chaque mathématicien a ses petites manies. Pour autant je sais que les petites manies qui suivent sont partagées par bon nombre de mes collègues.

1 Les grands principes de la rédaction mathématique

Ne négligez sous aucun prétexte les enseignements de cette première partie.
Aussi étrange que cela puisse paraître, ils sont à bien des égards les plus importants de toute votre année de MPSI.
Si les forts en maths ont un secret — qu'ils ignorent souvent eux-mêmes — il vous est en grande partie livré ci-dessous.

Si vous ne connaissez pas les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$, vous en trouverez une brève exposition dans mon chapitre de cours « Pour bien commencer l'année ».

1.1 Introduire tout ce dont on parle

La première règle de rédaction en mathématiques, c'est que **toute notation quelle qu'elle soit doit être introduite**. En français, si vous dites : « Ils ont travaillé toute la soirée » sans avoir précisé qui sont ces « ils » travailleurs, vous risquez de n'être pas compris. En maths, c'est pareil : vous devez présenter tout ce dont vous parlez.

Mais comment introduit-on concrètement un objet mathématique ? Cela dépend du statut logique de l'objet à introduire : cet objet est soit un objet quelconque, une variable décrivant un certain ensemble ; soit un objet précis déjà défini auquel on veut seulement donner un nom par souci de concision.

1.1.1 Introduire une variable

• Quand on veut introduire une variable décrivant tout un ensemble, autrement dit un élément x quelconque, indéterminé d'un ensemble E, on peut procéder de deux manières :

✌ ✌ ✌ Soit $x \in E$.

✌ ✌ ✌ Pour tout $x \in E$: ...

On peut bien sûr utiliser n'importe quel symbole à la place de x : y, z, α, f...

• Oublier ces petites phrases d'introduction est une faute grave — faute de rédaction mais surtout faute logique. Par exemple, imaginez qu'on vous demande d'établir la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$. Première réponse :

✖✖✖ $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

Rédaction incorrecte car vous n'introduisez pas votre x. Voici deux réponses correctes :

✌ ✌ ✌ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos x \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

✌ ✌ ✌ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos x \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

Bon, mais tout ceci n'est-il pas un peu de la maniaquerie ? Sur un exemple aussi simple, sans doute. Mais un nombre considérable d'erreurs mathématiques, côté étudiants, provient d'une indifférence totale aux objets manipulés et à leur introduction. Pour cette raison, de nombreux raisonnements d'étudiants ne sont ni corrects ni incorrects, mais n'ont tout simplement aucun sens. Or il est grave de produire des phrases qui n'ont pas de sens ! Dans la vie courante, cela relève de la folie. Plus un problème mathématique est subtil, plus il exige de rigueur. En classe préparatoire, apprenez donc à être rigoureux tout le temps. Les matheux professionnels ne le sont pas autant : mais eux savent bien quand ils peuvent se permettre un certain relâchement sans commettre d'erreur. Vous aussi, quand vous maîtriserez parfaitement la langue mathématique, vous pourrez lâcher du lest — mais pas avant !

• Les « Soit $x \in E$ » sont certes d'abord une garantie de rigueur, mais ils sont en réalité davantage. Il arrive souvent que les étudiants ne sachent pas du tout par quoi commencer la résolution d'un problème. La peur de la page blanche en quelque sorte. Il leur suffirait pourtant d'introduire proprement quelques notations, **AVEC MÉTHODE**, pour s'en sortir. Imaginez par exemple qu'on vous demande de démontrer le théorème suivant :

« Toute fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}$ possède une limite en ∞. »

Par où commencer ? Il faut d'abord traduire l'énoncé au moyen de quantificateurs :

« Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si f est croissante, alors $\lim\limits_{\infty} f$ existe. »

Ou encore, en résumé — la rédaction suivante est incorrecte mais elle a pour elle une certaine clarté :

$$\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonction}, \qquad \left(f \text{ croissante} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\infty} f \text{ existe}\right).$$

En voyant cela, on sait tout de suite par quoi la preuve doit **COMMENCER** — même si on ne sait du tout ce qu'on va faire derrière :

✌ ✌ ✌ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose f croissante. Montrons qu'alors $\lim\limits_{\infty} f$ existe.

Tout élève mathématicien digne de ce nom doit de lui-même écrire cela sur sa copie, **même si la suite de la preuve lui échappe**. Vous avez le droit de ne pas savoir finir, pas celui de ne pas savoir commencer. On vous demande de montrer un résultat de la forme « Pour tout $x \in E$, ... » ? Commencez par « Soit $x \in E$ ». Le résultat est de la forme « Pour tout $x \in E$, si x a la propriété $\mathcal{P}$, alors... » ? Commencez par : « Soit $x \in E$. On suppose que x vérifie la propriété $\mathcal{P}$. »

Quel intérêt ? Tant que vous ne vous êtes pas donné une fonction f croissante fixée, vous n'êtes pas en mesure de montrer que toute fonction croissante possède une limite en ∞. Au contraire, maintenant que vous avez commencé votre preuve comme indiqué ci-dessus, vous avez une fonction f fixée entre les mains et pouvez donc entamer une réflexion à son sujet. De même qu'un peintre ne peut pas peindre sans peinture ni toile, un mathématicien ne peut pas réfléchir sans un matériau pour sa réflexion.

Si cette méthode vous paraît idiote parce qu'évidente, tant mieux ! Mais sachez que beaucoup d'étudiants sont incapables de penser mathématiquement parce qu'ils n'ont jamais compris cela.

AVEZ-VOUS BIEN COMPRIS CE QUI PRÉCÈDE ?
Y PENSEREZ-VOUS QUAND VOUS SEREZ SEULS FACE À UN EXERCICE ?

1.1.2 DONNER UN NOM À UN OBJET PAR SOUCI DE CONCISION

• Il arrive souvent en mathématiques qu'on veuille donner un nom simple à une quantité compliquée parce qu'on sait qu'on va devoir souvent l'écrire. Par exemple, si vous devez employer plusieurs fois dans un raisonnement l'expression $\ln\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$, où n_0 est un entier déjà connu de votre lecteur, vous pouvez choisir de noter K cette quantité et profiter de ce nom pour rendre votre raisonnement plus lisible : plutôt que $\ln\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$, vous écrirez partout K. Mais comment rédige-t-on une telle définition ? Deux verbes nous permettent de le faire aisément : les verbes « poser » et « noter ».

✌ ✌ ✌ On note K le réel $\ln\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$.

✌ ✌ ✌ On pose $K = \ln\dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$.

Ces deux rédactions correctes, tout à fait équivalentes, appellent quelques commentaires :

1) Il est impératif dans les deux cas que la lettre K n'ait pas déjà été utilisée ailleurs dans le raisonnement que vous êtes en train de faire : il faut qu'elle soit neuve. Si vous vous appelez Sarah ou Antoine, vous éviterez sans doute d'appeler vos enfants Sarah ou Antoine pour éviter les confusions. C'est pareil en maths.
2) Dans les deux cas également, il est impératif que la quantité $\ln \dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$ soit parfaitement connue du lecteur au moment de votre définition. Ici cela suppose que vous avez déjà introduit avant la lettre n_0.
3) Remarquez pour finir que l'usage bannit généralement la construction suivante avec le verbe « noter » :

✖✖✖ On note $K = \ln \dfrac{e^{n_0}+1}{\sqrt{n_0^2+1}}$.

• Attention, l'exemple suivant est incorrect. Admettons que vous ayez déjà introduit un certain réel positif y. Dans ce cas vous n'avez pas le droit d'écrire, pour introduire la lettre x :

✖✖✖ On pose $y = x^2$.

Cette formulation sous-entend que c'est y qui est introduit et que x est déjà connu, alors que vous vouliez justement faire le contraire. **À gauche** du symbole d'égalité doit figurer le **nouveau nom** que vous êtes en train d'introduire, et **à droite**, le contenu **déjà introduit** auquel vous attachez ce nouveau nom.

Voici deux façons correctes d'introduire un réel x de carré y.

✌ ✌ ✌ On pose $x = \sqrt{y}$.

✌ ✌ ✌ On pose $x = -\sqrt{y}$.

• Concrètement, à quelle occasion utilise-t-on les verbes « poser » et « noter » ? Leur premier usage, présenté ci-dessus, vise à éviter les répétitions d'expressions compliquées : en donnant un petit nom simple à une expression compliquée, on rend plus lisible son travail. Mais on utilise aussi ces verbes pour une raison moins anecdotique. Imaginez qu'on vous demande de montrer qu'il existe des réels x et y dont la somme est un entier mais qui ne sont pas eux-mêmes des entiers — autrement dit, avec des quantificateurs :

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}/ \qquad x+y \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y \notin \mathbb{Z}.$$

Ici, vous ne pouvez pas commencer par « Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que... » car on ne vous demande pas de prouver un résultat sur des réels quelconques ($\forall$), mais un résultat d'existence ($\exists$). Or pour montrer un résultat d'existence, il faut trouver un exemple. Ici, vous devez sortir de votre chapeau un x et un y qui vérifient les propriétés demandées. Exemple :

✌ ✌ ✌ On pose $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = -\dfrac{1}{2}$. Alors x et y sont deux réels non entiers. Pourtant $x + y = 0$ est un entier.

Bien sûr, $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$ ne sont pas les seuls exemples possibles, mais puisqu'on nous demande un résultat d'existence, un simple exemple suffit : si on peut donner un exemple d'objet vérifiant les propriétés demandées, c'est qu'un tel objet existe. Vous remarquerez bien que les verbes « poser » et « noter » sont liés au quantificateur existentiel $\exists$ — alors que le « Soit... » était lié au quantificateur universel $\forall$.

1.2 Mettre en évidence les articulations logiques

• Quand on rédige un raisonnement, il est très important de distinguer clairement les hypothèses des conclusions par exemple, et d'indiquer les rapports d'implication entre les différentes propositions. Cela se fait notamment au moyen de « donc », « alors », « par conséquent », « ainsi », « or », « de plus », « en outre », « ensuite », « enfin », « mais », « cependant », « toutefois », « puisque », « comme », « car », etc. Liste non exhaustive ! Truffez vos raisonnements de ces petits mots qui guideront votre lecteur et, si possible, variez-les : cela donnera plus de style à votre rédaction.

Par exemple, imaginez qu'on vous demande de montrer la proposition : $\forall x \in [0,1], \quad \sqrt{1-x^2} \in [0,1]$. Présentons deux réponses :

✖✖✖

$$\begin{array}{cl} 0 \leqslant x \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 & (t \longmapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 & (t \longmapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+) \end{array}$$

✌ ✌ ✌ Soit $x \in [0,1]$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, ou encore : $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$. Mais la fonction racine carrée est aussi croissante donc : $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$. Comme voulu, $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$.

• Attention : quand vous faites un raisonnement, ne remplacez pas des mots comme « donc » ou « alors » par le symbole de l'implication $\Longrightarrow$. Supposons par exemple que pour un certain $x \in [0,1]$ fixé d'une façon ou d'une autre, on veuille démontrer que $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$. En toute rigueur, la réponse suivante est tout à fait incorrecte :

✖✖✖ $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1.$

Mais pourquoi incorrecte ? C'est un peu subtil mais pas inintéressant. Une proposition de la forme « $p \Longrightarrow q$ » n'affirme pas que q est vraie, et ne part pas du principe que p l'est non plus. Ainsi, quand on affirme que « $p \Longrightarrow q$ », il se peut très bien que p, voire q, soit fausse. Ce qui est affirmé avec certitude, c'est que **si** p est vraie, **alors** q l'est aussi.
Il ressort de cette remarque que « $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$ » et « $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$ » sont deux propositions différentes. La première affirme en effet que **si** $x \in [0,1]$, **alors** $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$. Il se trouve ici qu'il est vrai que $x \in [0,1]$, c'est notre hypothèse de départ. On peut donc en déduire que $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$. La seconde proposition (de la forme « q ») se déduit donc de la première (de la forme « $p \Longrightarrow q$ ») parce qu'on sait par ailleurs que la proposition « p » est vraie.

En résumé, quand on veut démontrer une proposition « q », on ne peut se contenter de remarquer que « $p \Longrightarrow q$ ». Encore faut-il que la proposition « p » soit vraie aussi. Le raisonnement effectué a la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\text{La proposition « } p \text{ » est vraie} \\ \text{La proposition « } p \Longrightarrow q \text{ » est vraie}\end{array}\right\} \quad \textsc{donc} \quad \text{la proposition « } q \text{ » est vraie}$$

et le DONC ici présent ne doit pas être remplacé par le symbole de l'implication $\Longrightarrow$.

Je préfère insister lourdement : quoi que vos anciens professeurs de mathématiques aient toléré, le symbole $\Longrightarrow$ n'est pas l'équivalent exact d'un « donc ». La confusion n'est pas trop gênante au lycée, mais puisqu'on fait le choix des mathématiques à haut niveau en MPSI, elle n'est plus tolérable !

1.3 Annoncer ce que l'on fait

Rédiger correctement une démonstration mathématique, c'est aussi expliquer ce que l'on fait. Annoncez toujours quel raisonnement vous êtes sur le point de faire : « Montrons que... », « Nous allons maintenant prouver que... », « Il ne nous reste plus qu'à montrer que... », etc. Votre travail n'en sera que plus lisible.

1.4 Citer une définition ou un théorème

Citer une définition ou un théorème exige une précision parfaite. Hypothèses, notations et conclusions doivent être énoncées clairement et sans faute. Un théorème à peu près correct mais pas tout à fait, ou mal rédigé, est un théorème mal appris — et un théorème mal appris, c'est une impression très négative du correcteur.

Imaginez qu'on vous demande de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point. Première réponse :

✖✖✖ Le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Economique, certes, mais insuffisant. Qui sont f et a ? Pourquoi la limite du taux d'accroissement existe-t-elle ? Correction :

✌✌✌ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.
On dit que f est *dérivable en* a si la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On appelle dans ce cas *nombre dérivé de* f *en* a cette limite, que l'on note $f'(a)$: $\quad f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Connaître une définition ou un théorème, c'est être capable de les rédiger ainsi — et vite, bien sûr.

1.5 Les démonstrations par récurrence

• La rédaction des démonstrations par récurrence est présentée dans le chapitre de cours « Pour bien commencer l'année ». N'y revenons pas ici.

• Il est tentant souvent de remplacer un raisonnement par récurrence par trois petits points « ... ». A l'oral ça peut passer, car l'interrogateur peut toujours exiger en direct une rédaction propre. A l'écrit ça passe nettement moins bien — surtout sur une copie bourrée d'erreurs qu'on pourrait soupçonner de bluff...

Par exemple, rappelons qu'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$. Un théorème affirme qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = q^n u_0$. Pourquoi ça ? D'abord avec trois petits points :

✖✖✖ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\qquad u_n = qu_{n-1} = q \times qu_{n-2} = q \times q \times qu_{n-3} = \ldots = \overbrace{q \times q \times \ldots \times q}^{n \text{ fois}} u_0 = q^n u_0.$

Ensuite par récurrence :

> ✌✌✌ **Initialisation :** Comme $q^0 = 1$, $u_0 = q^0 u_0$.
>
> **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = q^n u_0$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique : $u_{n+1} = qu_n$. Or $u_n = q^n u_0$ par hypothèse, donc $u_{n+1} = q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0$ comme voulu.
>
> Fin de la récurrence.

Il est vrai qu'on comprend souvent mieux la preuve avec trois petits points que la preuve par récurrence. Seulement voilà : la preuve par récurrence est rigoureuse et l'autre non.

2 Cas particuliers de rédaction problématique

2.1 Le mélange des genres

Ecrivez français ou mathématique, mais pas les deux à la fois ! Par exemple, n'écrivez pas :

> ✖✖✖ $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, la somme de m et n est un entier.

mais au choix :

> ✌✌✌ $\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad m + n \in \mathbb{Z}$.
>
> ✌✌✌ La somme de deux entiers est un entier.

De même, ne remplacez pas, dans une phrase en français, l'expression « il existe » par le symbole $\exists$.

Le mélange autorisé le plus courant concerne le symbole $\in$, comme dans « Soit $x \in E$ ». On n'est pas obligé d'écrire : « Soit x un élément de E ». Ce n'est là qu'une question de convention.

2.2 Quelle différence entre f et $f(x)$? ou comment définir une fonction

• Commençons par un exemple bien laid :

> ✖✖✖ La fonction $e^x \sin x$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

Le problème dans cet exemple, c'est que $e^x \sin x$... **n'est pas une fonction !** On dit plutôt que $e^x \sin x$ est une *expression*.

• Une *fonction* est un objet mathématique qui associe à tout élément d'un certain ensemble un élément d'un autre ensemble. Définir une fonction f revient donc à définir la façon dont un élément x appelé *argument* est transformé en un élément $f(x)$ dépendant de x. La **fonction** f n'est pas l'**expression** $f(x)$ elle-même, mais l'association du x et du $f(x)$. Le $f(x)$ tout seul n'a pas de sens car nous avons vu qu'en mathématiques il est essentiel que tout symbole soit introduit : ici, quel est ce x qui flotte en l'air tout seul ? Pour toujours garder à l'esprit l'association $x/f(x)$, on note $x \longmapsto f(x)$ ou tout simplement f la fonction qui à un objet x associe l'objet $f(x)$.

Attention à un détail : ne confondez pas la flèche $\longrightarrow$ et la flèche $\longmapsto$!

• En pratique, quand on veut faire référence à une fonction précise dans une phrase, soit la fonction a un nom et on peut employer ce nom (par exemple f, $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, sin, cos...), soit la fonction n'a pas de nom mais est définie par une expression explicite et on la note alors $x \longmapsto \ldots$. Naturellement, la lettre x peut être remplacée par n'importe quel symbole.

Voici finalement une version correcte de l'exemple dont nous sommes partis :

> ✌✌✌ La fonction $x \longmapsto e^x \sin x$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour finir, tâchons d'apprendre à définir correctement une fonction. Supposons par exemple qu'on veuille introduire proprement et appeler h la fonction qui envoie tout entier naturel sur son carré. On pourra procéder ainsi :

✌ ✌ ✌ On note h la fonction $n \longmapsto \sqrt{n}$ définie sur $\mathbb{N}$.

✌ ✌ ✌ On note h la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \sqrt{n} \end{array} \right.$.

✌ ✌ ✌ On note h la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad h(n) = \sqrt{n}$.

Tous ces exemples sont corrects. Le second est tout de même plus complet car on y précise aussi l'ensemble d'arrivée, qui est seulement implicite dans les deux autres. Notez bien que la flèche, en haut, qui relie l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ à l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ est $\longrightarrow$ et non $\longmapsto$. Allez savoir pourquoi.

2.3 Parler des propriétés d'une fonction

Les deux exemples suivants sont incorrectement rédigés :

✖✖✖ La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✖✖✖ La fonction $x \longmapsto e^{e^x}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le problème, c'est qu'on ne dit pas qu'une fonction est dérivable/croissante « pour tout $x \in \ldots$ ». On dit :

✌ ✌ ✌ La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

✌ ✌ ✌ La fonction $x \longmapsto e^{e^x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Il y a de vraies justifications à cette apparence de maniaquerie, mais je ne détaillerai pas ici.

2.4 Dériver une fonction

• Dériver une fonction n'est pas difficile, mais bien rédiger le calcul d'une dérivée est parfois un exercice de rédaction périlleux. Par exemple, soit l'exercice consistant à dériver sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \longmapsto e^{\sin(x^2)}$. Voici une réponse :

✖✖✖ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = \left(e^{\sin(x^2)}\right)' = \big(\sin(x^2)\big)' e^{\sin(x^2)} = 2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$.

Cela ne va pas du tout : les notations de la forme $\big(f(x)\big)'$ sont absolument **interdites**. Notez $f'(x)$ à la place. Seules les **fonctions** tolèrent la dérivation. De fait, $f(x)$ est une **expression**, pas une fonction. Si l'on veut rédiger bien le calcul précédent, on écrit le bon résultat directement — après tout vous êtes grands, vous êtes censés ne plus faire d'erreur de calcul quand vous dérivez :

✌ ✌ ✌ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = 2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$,

Quiconque sait dériver saura comprendre à cette rédaction quel calcul vous avez fait. On n'en demande pas plus.

• Finissons ce paragraphe avec une précision importante. Si vous voulez dériver la fonction $x \longmapsto \sin(2x)$, nous venons de dire que la notation $\big(\sin(2x)\big)'$ est interdite. Mais ne la remplacez surtout pas par $\sin'(2x)$!

1) Dériver $x \longmapsto \sin(2x)$ revient à dériver la composée de $x \longmapsto 2x$ suivie de $y \longmapsto \sin y$. Le calcul d'une telle dérivée nous donne donc la fonction $x \longmapsto 2\cos(2x)$.

2) Quant à la fonction $x \longmapsto \sin'(2x)$, elle n'est autre que la fonction $x \longmapsto \cos(2x)$, car $\sin' = \cos$.

2.5 La naïveté des notations classiques

• Pour que leurs élèves retiennent bien les formules, les professeurs de mathématiques utilisent tous les mêmes notations. Par exemple, dans leurs cours, ils notent unanimement $x \longmapsto ax^2+bx+c$ les fonctions polynomiales de degré 2 et Δ le discriminant associé quand ils vous présentent la résolution des équations du second degré. Vous connaissez tous la formule « $\Delta = b^2-4ac$ » **avec les mêmes symboles Δ, a, b et c.**

Imaginez un exercice où l'on est obligé de résoudre de sa propre initiative l'équation du second degré $x^2+3x-2=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Premier exemple de rédaction :

✖✖✖ $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 1\times(-2) = 17 > 0$, donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Cette rédaction est excessivement MALADROITE, même si on la comprend parfaitement. Où les quantités Δ, a, b, c, x_1 et x_2 sont-elles introduites dans cet exemple ? Nulle part. Comme nous l'avons déjà dit, tout symbole utilisé doit être introduit proprement. Exemple de rédaction correcte :

✌✌✌ L'équation $x^2+3x-2=0$ peut s'écrire $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=3$ et $c=-2$. Son discriminant Δ vaut alors : $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 1\times(-2) = 17$ et est strictement positif. Finalement, l'équation étudiée possède deux solutions x_1 et x_2 distinctes : $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Cette première rédaction est parfaitement correcte, mais qu'elle est LONGUE ! Au fond, est-il nécessaire d'introduire Δ, a, b et c ? Pas vraiment. La rédaction la plus limpide est ici la plus économique :

✌✌✌ L'équation $x^2+3x-2=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a pour discriminant $3^2-4\times 1\times(-2) = 17$ strictement positif. Elle possède donc deux solutions, à savoir $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Bref : libérez-vous des Δ, a, b, c !

• Peut-être ne comprenez-vous pas bien pourquoi il est maladroit d'écrire « $\Delta = b^2-4ac$ » même quand Δ, a, b et c n'ont pas été introduits. Après tout, tout le monde comprend. Certes.

Souvenez-vous : une stalactite est une formation calcaire qui se développe verticalement à partir de la voûte d'une cavité souterraine, généralement en raison d'un phénomène de ruissellement goutte à goutte ; une stalagmite est une formation calcaire analogue qui se développe à partir du sol et non de la voûte. Vous connaissez sans doute le moyen mnémotechnique classique utilisé pour retenir la différence entre ces deux notions : « stalac**t**ite/**t**ombe », « stalag**m**ite/**m**onte ».

Imaginez un géologue professionnel qui, dans ses articles de recherche ou devant ses pairs dans des conférences internationales, écrirait entre parenthèses « tombe » à chaque fois qu'il écrit « stalactite » et « monte » à chaque fois qu'il écrit « stalagmite ». On le jugerait ridicule. Il se passe la même chose avec « $\Delta = b^2-4ac$ ». Que vous ayez un moyen mnémotechnique pour retenir une formule, pourquoi pas ? Mais n'en faites pas profiter tout le monde et gardez-le pour vous. On a sinon l'impression que vous n'avez aucun recul sur la formule en question. Evitez de donner cette impression aux gens qui vous lisent.