Exercice 6 du TD 6. Méthode de réduction de Gauss.

Cas 1 :Lorsqu'on a un x_i^2 dans l'expression de q :
Exemple :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1x_3$$

On s'occupe par exemple de x_1^2
On factorise les termes où x_1 apparaît par le coefficient devant x_1^2 c'est-à-dire 2 et on recopie le reste de l'expression sans la toucher :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_3) + x_2^2$$

On factorise par x_1 les termes où x_1 apparaît :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2\left(x_1^2 + x_1\left[\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right]\right) + x_2^2 \qquad (1)$$

On considère la parenthèse $\left(x_1^2 + x_1\left[\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right]\right)$ comme étant le début de l'identité remarquable du type $(a+b)^2$:

$$\left(x_1^2 + x_1\left[\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right]\right) = \left(x_1 + \left[\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right]\right)^2 - \left[\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right]^2$$

On ne touche plus du tout à la première parenthèse au carré qui est à présent le seul terme faisant apparaître du x_1. On calcule l'autre partie de l'expression :

$$\left(x_1^2 + x_1\left[\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right]\right) = \left(x_1 + \left[\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right]\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{8}x_2x_3 + \frac{1}{16}x_3^2\right)$$

On réinsère le tout dans (1) :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2\left[\left(x_1 + \left[\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right]\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{8}x_2x_3 + \frac{1}{16}x_3^2\right)\right] + x_2^2$$

On regroupe les termes (en ne touchant pas à la parenthèse avec x_1) :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= 2\left(x_1 + \left[\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right]\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{8}x_2x_3 + \frac{1}{16}x_3^2\right) + x_2^2 \\ &= 2\left(x_1 + \left[\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right]\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + \frac{1}{4}x_2x_3 \end{aligned}$$

On réitère cette méthode tant qu'il reste des x_i^2 dans la nouvelle expression de q, sans toucher aux parenthèses faisant apparaître les x_i déjà traités : ici on réitère ce que l'on vient de faire pour x_2^2 sans toucher à la parenthèse avec x_1 que l'on a déjà traité et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de x_i^2. S'il reste un x_ix_j avec $i \neq j$, on applique alors le cas 2 ci-dessous ; sinon, la méthode est finie.

Cas 2 :Lorsqu'on n'a aucun x_i^2 dans l'expression de q mais qu'on a un x_ix_j avec $i \neq js$:
Exemple :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 - 8x_1x_3 + 5x_2x_3$$

On s'occupe par exemple de x_1x_2.
On écrit q sous la forme :

$q(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2 + x_1 \times$(expression sans x_1)$+x_2\times$(expression sans x_2)+(expression à la fois sans x_1 et sans x_2)

C'est-à-dire :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + x_1 \times (-8x_3) + x_2 \times (5x_3)$$

Ici, il ne reste pas d'expression à la fois sans x_1 et sans x_2 parce qu'on est sur $\mathbb{R}^3$ mais sur $\mathbb{R}^4$ il pourrait rester un terme en x_3x_4 et c'est ce terme que vous mettriez dans (expression à la fois sans x_1 et sans x_2) et que recopieriez

simplement sans vous en occuper pour l'instant dans tout ce qui suit.
On a donc en posant :

$$\begin{cases} a & = 3 \\ B & = \text{expression sans } x_1 = -8x_3 \\ C & = \text{expression sans } x_2 = 5x_3 \end{cases}$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2 + x_1 \times (B) + x_2 \times (C)$$

On factorise par a :

$$q(x_1, x_2, x_3) = a\left[x_1x_2 + x_1 \times \left(\frac{B}{a}\right) + x_2 \times \left(\frac{C}{a}\right)\right]$$

Puis on écrit l'égalité suivante :

$$q(x_1, x_2, x_3) = \frac{a}{4}\left[\left(\left[x_1 + \frac{C}{a}\right] + \left[x_2 + \frac{B}{a}\right]\right)^2 - \left(\left[x_1 + \frac{C}{a}\right] - \left[x_2 + \frac{B}{a}\right]\right)^2\right]$$

Les deux parenthèses au carré sont les seules à contenir du x_1 ou du x_2 et ne devront plus du tout être touchées (ici il n'y a de toute façon plus rien d'autre puisqu'on n'a pas eu de termes à la fois sans x_1 et sans x_2 puisqu'on est sur $\mathbb{R}^3$ donc la méthode s'arrête là). On calcule et on trouve :

$$q(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4}\left[\left(\left[x_1 + \frac{5x_3}{3}\right] + \left[x_2 + \frac{-8x_3}{3}\right]\right)^2 - \left(\left[x_1 + \frac{5x_3}{3}\right] - \left[x_2 + \frac{-8x_3}{3}\right]\right)^2\right]$$

et finalement :

$$q(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4}(x_1 + x_2 - x_3)^2 - \frac{3}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{13}{3}x_3\right)^2$$

Résumé : Lorsqu'on a une forme quadratique q, on applique le cas 1 dès qu'il y a des x_i^2 et sinon on applique le cas 2. On trouve alors une autre expression pour q. Si on était dans le cas 1 et qu'on s'est occupés de x_i^2, on ne touche plus du tout la seule parenthèse au carré contenant x_i et si on était dans le cas 2 et qu'on s'est occupé de x_ix_j avec $i \neq j$, on ne touche plus aux 2 seules parenthèses au carré contenant x_i et x_j. On développe toutes les autres parenthèses et on applique alors à l'expression restante (l'expression sans les parenthèses que l'on ne touche plus dont je viens de parler) le cas 1 ou le cas 2 selon s'il reste ou pas des x_i^2 et on itère ainsi les cas 1 et/ou 2 jusqu'à obtenir q sous la forme d'une combinaison linéaire de formes linéaires du type, sur $\mathbb{R}^3$ par exemple :

$$q(x_1, x_2, x_3) = \alpha(f_1(x_1, x_2, x_3))^2 + \beta(f_2(x_1, x_2, x_3))^2 + \gamma(f_3(x_1, x_2, x_3))^2$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.