Fiche 12 - EDP et séries de Fourier

Exercice 1. On considère l'équation de la chaleur

$$(EC) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in]0, L[, \quad \forall t > 0, & (1) \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L], & (2) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 & & (3) \end{cases}$$

qui modélise le problème suivant : une barre métallique de longueur L, représentée par le segment $[0, L]$, dont la température à l'instant t au point $x \in [0, L]$ est donnée par $u(x,t)$. On cherche à déterminer u en connaissant la condition initiale (2) et les conditions aux bords (3).

On pose $D =]0, L[\times]0, +\infty[$ et on suppose que u est continue sur $\overline{D} = [0, L] \times [0, +\infty[$ et de classe C^∞ sur D. On suppose en outre que u_0 est de classe C^1 sur $[0, L]$.

1. Montrer que si la fonction u s'écrit sous la forme $u(x,t) = F(x)G(t)$, où F et G ne s'annulent pas sur D, et vérifie (1) alors F et G vérifient chacune une équation différentielle linéaire de second ordre qu'on déterminera.
2. Résoudre ces équations différentielles en tenant compte des conditions aux bords (3).
3. En déduire que toute fonction de la forme

   $$(4) \qquad u(x,t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2} t}$$

   est une solution de (1) et (3) [On suppose que la série converge uniformément].
4. Soit $\bar{u}_0$ une fonction impaire et $2L$-périodique qui coïncide avec u_0 sur $[0, L]$. Justifier l'exsitence du développement en série de Fourier de $\bar{u}_0$ et donner une condition nécessaire sur a_n pour que la fonction u donnée en (4) soit solution au problème (EC).
5. Justifier que la fonction ainsi trouvée est bien solution au problème (EC).

Exercices supplémentaires

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On pose $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}$.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1 + x^2)\right)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

à l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$.

Exercice 5. Résoudre en utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 6. En effectuant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 7. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. On considère $\varphi : D \to D$ définie par

$$\varphi(x, y) = (u, v), \quad \text{avec } u = x,\ v = \frac{y}{x}.$$

1. Montrer que la fonction φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de D sur D ainsi que sa fonction reciproque.
2. A l'aide du changement de variables φ, résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y.$$

3. Quelle est la solution de l'équation qui vérifie

$$f(1, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, y) = \sin(y) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}?$$

Exercice 8. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4y$$

1. En utilisant le changement de variables $u = x + y,\ v = x - y$, trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et solutions de l'équation (E).
2. Parmi les solutions trouvées en 1) quelle est celle qui vérifie les conditions supplémentaires

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, x) = x^2 \text{ et } f(x, -x) = x^3.$$

Exercice 9. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \qquad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x, y) = (x, y + x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = f \circ \phi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u, v) = h(v - u^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x, y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).

3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u, uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 11. On considère l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \geqslant 0, \tag{EC}$$

où $a \in \mathbb{R}$. On impose les conditions aux limites

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad \text{pour tout } t \geqslant 0. \tag{CL}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $y(x,t) = e^{-n^2a^2\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ est une solution de (EC) qui satisfait les conditions aux limites (CL).
2. Soit
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2a^2\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$
Comment choisir les coefficients b_n pour que $y(x,t)$ vérifie la condition initiale $y(x,0) = \varphi(x)$, où φ est une fonction donnée sur $]0, L[$?
3. Déterminer les coefficients b_n dans le cas $\varphi(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$.

Exercice 12. On considère l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{EL}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions $u_n(x,y) = e^{-nx}\cos(ny)$ et $v_n = e^{-nx}\sin(ny)$ sont solutions de (EL) de période 2π en y.
2. Soit
$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\big(a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny)\big).$$
Trouver les coefficients a_n et b_n pour que $u(x,y)$ vérifie la condition $u(0,y) = y$, $\forall y \in]-\pi, \pi[$.