Feuille d'exercices IX - Espaces L^p.

Pour l'ensemble de cette feuille, λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\alpha \colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. A quelle condition sur α, la fonction f_α appartient-elle à $L^p(]0,1[,\lambda)$ pour $p \in [1,+\infty]$?
2. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X)$ est fini. Montrer les inclusions
$$L^\infty(X,\mu) \subseteq L^q(X,\mu) \subseteq L^p(X,\mu) \subseteq L^1(X,\mu)$$
pour $1 \leq p < q < +\infty$.
3. A-t-on les inclusions réciproques ?
4. Pour $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $g_{\alpha,\beta} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$. Pour $1 \leq p < \infty$, donner les conditions sur α,β pour que $g_{\alpha,\beta}$ soit dans $L^p(]0,+\infty[,\lambda)$.
5. En déduire que pour $1 \leq p < q \leq +\infty$, il n'y a aucune inclusion entre l'espace $L^p(]0,+\infty[,\lambda)$ et l'espace $L^q(]0,+\infty[,\lambda)$.

Exercice 2. Pour $1 \leq p < \infty$, on note l^p l'espace des suites de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < \infty.$$
On note l^∞ l'espace des suites bornées de nombres complexes.

1. Déterminer un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$, tel que $l^p = L^p(X,\mu)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. Montrer que $l^1 \subseteq l^p \subseteq l^q \subseteq l^\infty$ pour $1 \leq p < q \leq \infty$. (Indication : considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|(u_n)\|_p = 1$.)

Exercice 3. Pour cet exercice, on admet le théorème de densité suivant : l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$ pour $1 \leq p < \infty$.

1. Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R},\lambda)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction translatée $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f_x(t) = f(t-x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est également dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$.
   (b) Montrer que si une suite de réels x_n converge vers x alors f_{x_n} converge vers f_x dans l'espace $L^p(\mathbb{R},\lambda)$, c'est-à-dire $\|f_{x_n} - f_x\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. (Indication : commencer par montrer ce résultat pour f continue à support compact.)
2. En considérant $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, montrer que le résultat précédent est faux pour $L^\infty(\mathbb{R},\lambda)$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R},\lambda)$. On définit sa transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par
$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)dt.$$
   (a) Montrer que $\hat{f}$ est bien définie et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
   (b) Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que pour tout $x \neq 0$,
$$2\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t-\pi/x))e^{-itx}dt.$$
   (d) En déduire la limite de $\hat{f}$ en $+\infty$ et $-\infty$.