Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 1

NORMES MATRICIELLES & CONDITIONNEMENT

Exercice 1. *Temps de calcul d'un déterminant.* On s'intéresse ici au temps nécessaire au calcul d'un déterminant en utilisant la formule le définissant : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)}$$

où $\mathcal{S}_n$ est le groupe des permutations, i.e. des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, et pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

1. Combien d'opérations élémentaires (additions, soustractions et multiplications) sont-elles nécessaires au calcul de $\det A$ par la formule ci-dessus ? On notera $c(n)$ ce nombre.
2. Sachant qu'un ordinateur fait environ un milliard d'opérations par seconde (gigaflop), évaluer le temps nécessaire au calcul d'un déterminant de taille 20 par cette méthode, puis celui d'un déterminant de taille 100. *On rappelle la formule de Stirling :* $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$.

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\| \cdot \|$ désigne une norme sur $\mathbf{K}^n$, $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ et $\mathrm{cond}(\cdot)$ la norme subordonnée et le conditionnement associés.

Exercice 2. *Norme de Frobenius.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On rappelle que la norme de Frobenius est définie par

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que la norme de Frobenius est une norme matricielle et qu'elle est donnée par :
$$\|A\|_F^2 = \mathrm{Tr}(A^* A).$$
2. Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

Exercice 3. *Calcul de normes subordonnées.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $|\!|\!| A |\!|\!|_p$, pour $p = 1, 2, \infty$, la norme subordonnée de A relativement à la norme vectorielle ℓ^p sur $\mathbf{K}^n$.

1. Montrer les deux formules suivantes :
$$|\!|\!| A |\!|\!|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad |\!|\!| A |\!|\!|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$
2. *Norme subordonnée à la norme 2.*

(a) Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2}$.

(b) Montrer que la norme 2 est invariante par tranformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors

$$\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

(c) Montrer que si A est une matrice normale, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(\,\cdot\,)$ désigne le rayon spectral.

(d) En déduire que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2.$$

Exercice 4. *Équivalence des normes et des conditionnements.*

1. Montrer que si deux normes $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ vérifient $C_1\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2\|\cdot\|_*$ pour un couple (C_1, C_2) de réels strictement positifs alors les normes subordonnées vérifient

$$\frac{C_1}{C_2}\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq \frac{C_2}{C_1}\|\cdot\|_*.$$

2. En utilisant les formules démontrées aux exercices précédents, montrer les relations suivantes, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le cas échéant donner les inégalités associées sur les conditionnements.

   (a) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

   (b) $\displaystyle\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq n\left(\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}|\right)$.

   (c) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$.

   (d) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1$.

Exercice 5. *Conditionnement associé à la norme 2.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible et $\|\cdot\|_2$ la norme subordonnée à la norme ℓ^2 sur $\mathbf{K}^n$. On note $\mathrm{cond}_2(\cdot)$ le conditionnement associé.
Ordonnons $0 \leq \mu_1(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A)$ les racines carrées des valeurs propres de A^*A. Ces valeurs sont appelées *valeurs singulières* de A.

1. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.

2. Montrer que si A est une matrice normale alors $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$.

Exercice 6. *Deux autres interprétations du conditionnement.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.

1. (a) Soit $b \in \mathbf{K}^n$ non nul, $x \in \mathbf{K}^n$ tel que $Ax = b$ et un couple $(\Delta A, \Delta x) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathbf{K}^n$ tel que $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \;\leq\; \mathrm{cond}(A)\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\,.$$

(b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul, une matrice ΔA et un vecteur Δx vérifiant les relations ci-dessus et tels que l'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

2. (a) Montrer que pour toute matrice singulière B, on a

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

(b) Soit $u \in \mathbf{K}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = \|A^{-1}\|_2$. On pose $B_0 = A - \dfrac{u(A^{-1}u)^*}{\|A^{-1}\|_2^2}$.

Montrer que $\|A - B_0\|_2 = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ et en déduire que

$$\frac{1}{\operatorname{cond}_2(A)} = \inf \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \;\middle|\; B \text{ singulière} \right\}.$$

Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

<u>**Exercice 7.**</u> *Un exemple.* On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$
2. Estimer à l'aide de l'exercice précédent la valeur de $\operatorname{cond}(A_\varepsilon)$ et comparer à la valeur exacte de $\operatorname{cond}(A_\varepsilon)$.