Université Claude Bernard Lyon 1
Math II - Algèbre

Corrigé du Contrôle Partiel

Question de cours.

1. Ker$u := u^{-1}(\{0\})$. Supposons que Ker $u = \{0\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $u(x) = u(y)$. Alors, $u(x-y) = u(x) - u(y) = 0$ implique que $x - y = 0$, i.e., $x = y$, donc u est injective. Supposons que u soit injective. Comme $u(0) = 0$ et u est injective, on en déduit que Ker $u = \{0\}$.

2. Le rang de u est la dimension de Im u.

3. $\dim \text{Ker } u + \text{rang}(u) = \dim E$.

EXERCICE 1.

1. Soient c_i $(1 \leq i \leq p)$ des scalaires dans $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1} c_i u_i = 0$. Alors, $0 = f(0) = f(\sum_{i=1} c_i u_i) = \sum_{i=1}^{p} c_i f(u_i)$. Par hypothèse, $c_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$, i.e., $\mathcal{F}$ est libre.

2. Soient c_i $(1 \leq i \leq p)$ des scalaires dans $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1} c_i f(u_i) = 0$. Alors, comme f est injective et $0 = \sum_{i=1} c_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^{p} c_i u_i)$, on a $\sum_{i=1}^{p} c_i u_i = 0$. Donc, par hypothèse, $c_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$, i.e., $f(\mathcal{F})$ est une famille libre.

EXERCICE 2.

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $u(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4) = 0$. Par définition, on a

$$u(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4) = (3a - b - c - d)\mathbf{f}_1 + 2(a + b - c - d)\mathbf{f}_2 + (a + b + c - 3d)\mathbf{f}_3,$$

qui implique $3a - b - c - d = 0, \quad a + b - c - d = 0, \quad a + b + c - 3d = 0$. Ce système est équivalent à $a = b = c = d$. Donc, $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$ est une base de Ker u et $\dim \text{Ker } u = 1$.

2. On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a\mathbf{e}'_1 + b\mathbf{e}'_2 + c\mathbf{e}'_3 + d\mathbf{e}'_4 = 0$. Comme

$$a\mathbf{e}'_1 + b\mathbf{e}'_2 + c\mathbf{e}'_3 + d\mathbf{e}'_4 = a\mathbf{e}_1 + (-a + b)\mathbf{e}_2 + (-b + c)\mathbf{e}_3 + (-c + d)\mathbf{e}_4$$

et que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, par définition, on a $a = -a + b = -b + c = -c + d = 0$ qui implique que $a = b = c = d = 0$. Donc, $\mathcal{B}'$ est une famille libre. Comme $|\mathcal{B}'| = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, ceci implique que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ est

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. La formule du rang implique $\mathrm{rang}(u) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\, u = 4 - 1 = 3$, u est donc surjective.

EXERCICE 3.

1. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = a\mathbf{1}_3 + bN$. Comme N et $\mathbf{1}_3$ commutent, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n =& (a\mathbf{1}_3 + bN)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a\mathbf{1}_3)^{n-k} (bN)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k \\ =& a^n \mathbf{1}_3 + \binom{n}{1} a^{n-1} bN + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 N^2 \\ =& \begin{pmatrix} a^n & \binom{n}{1} a^{n-1} b & \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \\ 0 & a^n & \binom{n}{1} a^{n-1} b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. On a

$$A(a^2\mathbf{1}_3 - abN + b^2N^2) = (a\mathbf{1}_3 + bN)(a^2\mathbf{1}_3 - abN + b^2N^2) = a^3\mathbf{1}_3 + b^3N^3 = a^3\mathbf{1}_3.$$

Par définition, on a $a^3 \neq 0$ qui implique que $A \cdot \dfrac{1}{a^3}(a^2\mathbf{1}_3 - abN + b^2N^2) = \mathbf{1}_3$, i.e., A est inversible.

4. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$A^n = a^n \mathbf{1}_3 + \binom{n}{1} a^{n-1} bN + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 N^2 = \begin{pmatrix} a^n & \binom{n}{1} a^{n-1} b & \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \\ 0 & a^n & \binom{n}{1} a^{n-1} b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$